Entwicklung einer Geometrie der allgemeinen metrischen Linienelementräume.

Von ARTHUR MOÓR in Debrecen.

Inhalt.

Einleitung.

Nach der Entwicklung der Geometrie der Riemannschen Räume hat zuerst P. FINSLER in seiner berühmten Arbeit [8][1]) die differentialgeometrischen Untersuchungen auf allgemeinere Räume erweitert. Im Anschluß an diese Untersuchungen hat dann E. CARTAN darauf hingewiesen [3], daß die von P. FINSLER untersuchten Räume, die wir kurz als Finslerräume bezeichnen wollen, sich von anderen metrischen Räumen dadurch unterscheiden, daß ihr Grundelement ein Linienelement ist. Seit CARTANS Untersuchungen betrachtet man einen Finslerraum als eine metrische Mannigfaltigkeit der Linienelemente (x^i, v^i), in der die Metrik durch eine metrische Grundfunktion $F(x, v)$ fest-

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern deuten an das Schriftenverzeichnis am Ende von unserer Arbeit.

gelegt ist. Die Grundfunktion $F(x, v)$ bestimmt den metrischen Grundtensor g_{ik} des Finslerraumes durch die Formel:

$$(0.1) \qquad g_{ik} = \frac{1}{2} \partial^2_{v^i v^k} F^2, \quad \partial^2_{v^i v^k} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial_{v^i} \partial_{v^k}}.$$

Im folgenden wollen wir die Geometrie eines allgemeineren Raumes $\mathfrak{L}_n$ entwickeln. Die Verallgemeinerung wird darin bestehen, daß wir die Metrik des Raumes unmittelbar durch einen metrischen Grundtensor g_{ik} festlegen; die Komponenten des metrischen Grundtensors sind also nicht durch eine Grundfunktion $F(x, v)$ in der Form (0. 1) bestimmt. Dabei ist g_{ik} selbstverständlich von dem Linienelement (x^i, v^i) abhängig. Der Finslerraum ist offenbar als Spezialfall in unserem Raum enthalten, denn der Finslerraum ist eben dadurch gekennzeichet, daß in ihm der metrische Grundtensor g_{ik} die Form (0. 1) hat. (Vgl. die Bemerkung am Ende von § 1.)

Eine derartige allgemeine Geometrie haben wir schon in unserer Arbeit [10] entwickelt, doch wollen wir jetzt noch weitere Verallgemeinerungen dadurch erreichen, daß wir die Bedingung

$$A_{oik} \equiv A_{iok} = p\, l_i A_k$$

durch eine allgemeinere ersetzen, und für die Übertragungsparameter des Raumes keine Symmetrieforderungen voraussetzen werden. Dabei fordern wir aber, daß die Übertragung metrisch sei.

Unser Hauptziel ist die Untersuchung der Bewegungsgruppe und deren Integrabilitätsbedingungen bezüglich dieser allgemeinen metrischen Übertragung. Es wird sich zeigen, daß die Integrabilitätsbedingungen der Killingschen Gleichungen formal mit den für die symmetrische Übertragung bestimmten Gleichungen identisch sind, nur die Liesche Ableitung hat in tensorieller Form einen verschiedenartigen Charakter. Es kommt nämlich in der Lieschen Ableitung auch der schiefsymmetrische Teil des Übertragungsparameters vor.

Dementsprechend zerfällt unsere Arbeit in zwei Hauptteile. Die erste enthält die Entwicklung der Geometrie des allgemeinen metrischen Linienelementraumes mit der Krümmungstheorie, während wir im zweiten Teil die Integrabilitätsbedingungen der Bewegungsgruppe und die spezielle Form des Hauptkrümmungstensors näher untersuchen werden. Wir wollen noch darauf hinweisen, daß die Symbolik der Geometrie, die wir im folgenden entwickeln wollen, formal sehr viele Ähnlichkeit mit der Geometrie der allgemeinen Räume aufweist, deren Grundelement eine Vektordichte vom Gewicht $(+p)$ ist. (Vgl. [5], [9], [13]). Das werden wir im folgenden auch bei der Untersuchung einzelner Fälle noch zeigen können.

I. TEIL. DIE VEKTORÜBERTRAGUNG UND DIE KRÜMMUNGSTHEORIE IM ALLGEMEINEN METRISCHEN LINIENELEMENTRAUM

§ 1. Festlegung der Metrik.

Zugrunde gelegt sei eine $(2n-1)$-dimensionale Linienelementmannigfaltigkeit $\mathfrak{L}_n$. Die Grundelemente von $\mathfrak{L}_n$ sind also die Linienelemente $(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n)$ (oder kurz (x, v)), wo die x^i einen Punkt, nämlich das Zentrum des Linienelementes, während die v^i seine Richtung bestimmen. Offenbar kommt bei den v^i nur ihr Verhältnis in Betracht, d. h. v^i und ϱv^i $(\varrho > 0)$ bestimmen dieselbe Richtung. Dementsprechend müssen die charakteristischen Größen von $\mathfrak{L}_n$ immer in den v^i positiv homogen von nullter Dimension sein.

Wir nehmen noch an, daß im Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ ein metrischer Grundtensor $g_{ik}(x, v)$ existiert, der in i, k symmetrisch ist und außerdem nach ihren Argumenten mindestens viermal stetig partiell ableitbar ist. Für die Krümmungstheorie ist diese Annahme schon hinreichend; in denjenigen Fällen aber, wo auch höhere partielle Ableitungen von g_{ik} vorkommen, wollen wir ihre Existenz und Stetigkeit immer voraussetzen.

Die Länge einer Kurve

$$x^i = x^i(t)$$

zwischen den Parameterwerten t_1, t_2 in $\mathfrak{L}_n$ bezüglich des Richtungsfeldes $v^i = v^i(t)$ ist durch die Formel

$$s_{1.2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ik}(x(t), v(t))\dot{x}^i \dot{x}^k}\, dt, \qquad \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt} \tag{1.1}$$

bestimmt.

Bedeuten $\xi^i(x, v)$ und $\eta^i(x, v)$ zwei Vektoren von $\mathfrak{L}_n$, so ist die Länge von ξ^i durch die Formel

$$\xi = \sqrt{g_{ik}(x, v)\xi^i \xi^k} \tag{1.2}$$

bestimmt, während der Winkel θ von ξ^i und η^i durch

$$\cos\theta = \frac{g_{rs}\xi^r \eta^s}{\sqrt{g_{ik}\xi^i\xi^k}\,\sqrt{g_{jm}\eta^j\eta^m}} \tag{1.3}$$

festgelegt ist. Diese Formeln stimmen also mit denen der Riemannschen Geometrie (vgl. [4]) überein, nur hängen jetzt die in den Gleichungen (1. 1)—(1. 3) vorkommenden Größen von (x^i, v^i) ab, während sie im Riemannschen Raum nur von x^i abhängig sind.

Wir definieren jetzt eine im folgenden sehr wichtige Funktion, die bei der Homogenisierung verschiedener Größen eine wichtige Rolle spielen wird.

Es sei

(1.4) $$F(x,v) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{g_{ik}(x,v)v^i v^k}.$$

Offensichtlich ist $F(x,v)$ in v^i homogen von erster Dimension, da g_{ik} homogen von nullter Dimension ist. In einem Finslerraum ist $F(x,v)$ eben die Grundfunktion des Raumes, im $\mathfrak{L}_n$ hat aber $F(x,v)$ keine solche fundamentale Bedeutung, da in $\mathfrak{L}_n$ aus (1.4) das Bestehen der Relation (0.1) nicht folgt.

Der Einheitsvektor, der die Richtung seines Stützelementes hat, hat die kontravarianten Komponenten:

(1.5) $$l^i = \frac{v^i}{F(x,v)}.$$

Aus den Gleichungen (1.2) und (1.4) kann unmittelbar verifiziert werden, daß l^i ein Einheitsvektor ist.

Wie wir schon in unserem Aufsatz [10] darauf hingewiesen haben, kann in einem $\mathfrak{L}_n$ die Metrik ebenso wie im Finslerraum durch die zum Punkt $\underset{(0)}{x^i}$ gehörige Carathéodorysche Indikatrixfläche

$$F(\underset{(0)}{x}, l) = 1$$

bzw. die zum Linienelement $(\underset{(0)}{x^i}\,\underset{(0)}{v^i})$ gehörige sog. oskulierende Indikatrix

$$g_{ik}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{v})X^i X^k = 1$$

charakterisiert werden (vgl. [16] Gl. (2.4) und (2.5)).

Bemerkung. Nach (1.1) und (1.4) kann $\mathfrak{L}_n$ auch als einen Finslerraum betrachtet werden, in dem aber — wie wir es im folgenden sehen werden — die Übertragung eine Verallgemeinerung derjenigen von Cartan ist. (Vgl. [3] und [8.])

§ 2. Das invariante Differential.

Wir werden in diesem Paragraphen ein invariantes Differential der Vektoren und Tensoren bestimmen. Da unser Raum $\mathfrak{L}_n$ im wesentlichen ein Spezialfall des affinzusammenhängenden Linienelementraumes ist, wird das invariante Differential eines Vektors ξ^i die Form:

(2.1) $$D\xi^i = d\xi^i + M_j{}^i{}_k \xi^j dv^k + L_j{}^i{}_k \xi^j dx^k$$

haben, wo für $M_j{}^i{}_k$

(2.1a) $$M_j{}^i{}_k l^k \equiv M_j{}^i{}_o = 0$$

besteht[2]) (vgl. [15] Gleichung (1,4), S. 8). Selbstverständlich müssen noch die

[2]) Wie gewöhnlich bezeichnen wir die Überschiebung mit l^i immer mit einem Index „o".

Größen $M_j{}^i{}_k$ und $L_j{}^i{}_k$ durch den metrischen Grundtensor g_{ik} ausgedrückt werden. Vorher wollen wir aber noch die Formel (2. 1) des invarianten Differentials auch in anderen Formen bestimmen.

Bezeichnen wir das invariante Differential von l^i mit $\omega^i(d)$, dann ist auf Grund von (2. 1a)

(2. 2) $$\omega^i(d) \overset{\text{def}}{=} Dl^i = (\delta^i_k + \overline{M}_o{}^i{}_k)\, dl^k + L_o{}^i{}_k\, dx^k,$$

wo δ^i_k das Kroneckersche Symbol[3]), und

$$\overline{M}_j{}^i{}_k = F M_j{}^i{}_k$$

bedeutet, außerdem soll $M_j{}^i{}_k$ noch die Bedingung

(2. 3a) $$(\delta^i_k + \overline{M}_o{}^i{}_k)(\delta^j_i - \overline{M}_o{}^j{}_i) = \delta^j_k,$$

d. h.

(2. 3b) $$\overline{M}_o{}^j{}_i \overline{M}_o{}^i{}_k = 0$$

erfüllen; auf diese Weise erhält man aus der Formel für $\omega^i(d)$:

$$d\frac{v^j}{F} \equiv dl^j = (\omega^i(d) - L_o{}^i{}_k\, dx^k)(\delta^j_i - \overline{M}_o{}^j{}_i).$$

Setzen wir aus dieser Gleichung dv^j in (2. 1) ein, so wird:

(2. 4) $$D\xi^i = d\xi^i + \omega_j{}^i(d)\, \xi^j$$

mit

(2. 5) $$\omega_j{}^i(d) \overset{\text{def}}{=} M_j^{*}{}^i{}_k\, \omega^k(d) + L_j^{*}{}^i{}_k\, dx^k,$$

wo

(2. 6a) $$M_j^{*}{}^i{}_k \overset{\text{def}}{=} \overline{M}_j{}^i{}_r(\delta^r_k - \overline{M}_o{}^r{}_k),$$

(2. 6b) $$L_j^{*}{}^i{}_k \overset{\text{def}}{=} L_j{}^i{}_k - M_j^{*}{}^i{}_t L_o{}^t{}_k$$

ist. Die Relation (2. 3b) gibt also mit (2. 1a) zusammen für $M_j{}^i{}_k$ zwei Bedingungen. O. VARGA hat in seinem Aufsatz [15] (Gl. (1. 4a) S. 10) statt (2. 3b) die Bedingung $M_o{}^j{}_i = 0$ gesetzt, für uns wird aber für das folgende die schwächere Bedingung (2. 3b) genügen. Diese kann leicht realisiert werden; z. B. durch die Annahme: $\overline{M}_o{}^i{}_k = l^i A_k$. Es wird dann (2. 3b) nach (2. 1a) identisch erfüllt sein. (Wir werden diesen Fall in § 6. D*) näher untersuchen).

Beachtet man, daß wegen der Homogenität von nullter Dimension in den v^i

$$d\xi^i = \partial_k \xi^i dx^k + \xi^i\|_k dl^k, \qquad \partial_k \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

[3]) Der Wert von δ^i_k ist gleich 1 oder 0, je nachdem $i = k$, oder $i \neq k$ ist.

ist, wo „$\|_k$" die Operation

$$\|_k \overset{\text{def}}{=} F\partial_{\cdot k} \equiv F\frac{\partial}{\partial v^k}$$

bedeutet, so folgt aus (2. 4)—(2. 6b) wenn dl^k wie vorher durch $\omega^k(d)$ ausgedrückt wird, daß das invariante Differential eines Vektors ξ^i auch in der Form:

$$D\xi^i = \xi^i|_k dx^k + \xi^i;_k \omega^k(d) \tag{2.7}$$

darstellbar ist, mit

$$\xi^i|_k \overset{\text{def}}{=} \partial_k \xi^i - \xi^i\|_r \overset{*}{L_o}{}^r{}_k + \overset{*}{L_r}{}^i{}_k \xi^r, \tag{2.8}$$

$$\xi^i;_k \overset{\text{def}}{=} \xi^i\|_r(\delta^r_k - \overset{*}{M_o}{}^r{}_k) + \overset{*}{M_t}{}^i{}_k \xi^t. \tag{2.9}$$

Die Formeln (2. 8) und (2. 9) sind die erste und zweite kovariante Ableitung von ξ^i im Raum $\mathfrak{L}_n$.

Wir wollen jetzt zeigen, daß die $\overset{*}{M_j}{}^i{}_k$ und $\overset{*}{L_j}{}^i{}_k$ mit $\overline{M}_j{}^i{}_k$ bzw. mit $L_j{}^i{}_k$ gleichberechtigt sind. Aus den Gleichungen (2. 6a) und (2. 6b) kann man nämlich $\overline{M}_j{}^i{}_k$ und $L_j{}^i{}_k$ ausdrücken; nach einer Überschiebung von (2. 6a) mit $(\delta^k_m + \overline{M}_o{}^k{}_m)$ bzw. mit l^j wird im Hinblick auf (2. 3a) und (2. 3b):

$$\overline{M}_j{}^i{}_m = \overset{*}{M_j}{}^i{}_k(\delta^k_m + \overline{M}_o{}^k{}_m), \qquad \overline{M}_o{}^k{}_m = \overset{*}{M_o}{}^k{}_m .$$

Aus (2. 6b) bekommt man nach einer Überschiebung mit l^j wegen (2. 3b)

$$\overset{*}{L_o}{}^i{}_k = (\delta^i_r - \overline{M}_o{}^i{}_r) L_o{}^r{}_k .$$

Aus dieser Gleichung erhält man $L_o{}^j{}_k$ nach einer Überschiebung mit $(\delta^j_i + \overline{M}_o{}^j{}_i)$; setzt man den erhaltenen Wert von $L_o{}^j{}_k$ in (2. 6b) ein, so wird

$$L_j{}^i{}_k = \overset{*}{L_j}{}^i{}_k + \overline{M}_j{}^i{}_r \overset{*}{L_o}{}^r{}_k \tag{2.10}$$

w. z. b. w.

Wenn man also die Übertragung aus g_{ik} bestimmen will, so genügt hierzu schon die Bestimmung von $\overset{*}{M_j}{}^i{}_k$ und $\overset{*}{L_j}{}^i{}_k$ durchzuführen. Wir fordern: *die Übertragung mit den Übertragungsparametern $\overset{*}{M_j}{}^i{}_k$ und $\overset{*}{L_j}{}^i{}_k$ soll metrisch sein.* Die analytische Bedingung dafür ist das Verschwinden des invarianten Differentials von g_{ik}. Nach den Gleichungen (2. 7)—(2. 9) ist das gleichbedeutend mit

$$g_{ik;m} \overset{\text{def}}{=} g_{ik}\|_r(\delta^r_m - \overset{*}{M_o}{}^r{}_m) - 2\overset{*}{M}_{(ik)m} = 0, \tag{2.11}$$

$$g_{ik}|_m \overset{\text{def}}{=} \partial_m g_{ik} - g_{ik}\|_r \overset{*}{L_o}{}^r{}_m - 2\overset{*}{L}_{(ik)m} = 0. \tag{2.12}$$

Diese beiden Gleichungen geben eine Relation für den symmetrischen Teil von $\overset{*}{M}_{ikm}$ und $\overset{*}{L}_{ikm}$. Bezeichnen wir mit μ_{ikm} den schiefsymmetrischen Teil von $\overset{*}{M}_{ikm}$ in i, k, so ist

$$\overset{*}{M}_{ikm} = \overset{*}{M}_{(ik)m} + \mu_{ikm}, \qquad \mu_{ikm} = \overset{*}{M}_{[ik]m}$$

und nach (2. 11) wird:

(2. 13) $$M^{*}_{ikm} = A_{ikr}(\delta^{r}_{m} - M^{*r}_{o\ m}) + \mu_{ikm}\,,$$

wo

(2. 13a) $$A_{ikr} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} g_{ik}\|_{r}$$

den die Raumtorsion bestimmenden Tensor bedeutet. Überschiebt man (2. 13) mit l^i, so wird:

(2. 14) $$M^{*r}_{o\ m}(\delta^{k}_{r} + A_{o\ r}^{\ k}) = A_{o\ r}^{\ k} + \mu_{o\ r}^{\ k}\,.$$

Wir nehmen noch an, daß die Gleichung

(2. 15) $$(\delta^{k}_{r} + A_{o\ r}^{\ k}) J^{t}_{k} = \delta^{t}_{r}$$

für J^t_k eindeutig lösbar ist. Die Bedingung dafür ist offenbar

$$\operatorname{Det} |\, \delta^{k}_{r} + A_{o\ r}^{\ k} | \neq 0.$$

Auf Grund von (2. 15) kann aber $M^{*t}_{o\ m}$ aus (2. 14) nach einer Kontraktion mit J^t_k leicht bestimmt werden; substituiert man dann diesen Wert in (2. 13), so wird

(2. 16) $$M^{*}_{ikm} = A_{ikr}(\delta^{r}_{m} - (A_{o\ m}^{\ t} + \mu_{o\ m}^{\ t}) J^{r}_{t}) + \mu_{ikm}\,.$$

Diese Formel bestimmt die allgemeinste Form für M^{*}_{ikm} in $\mathfrak{L}_n$; doch ist der Tensor μ_{ikn}, noch nicht ganz frei wählbar. Nach (2. 1a) und (2. 13) soll

(2. 16a) $$\mu_{iko} \equiv 0,$$

und nach (2. 3b) und (2. 16) wegen

$$M^{*}_{okm} = \overline{M}_{okm}\,, \qquad \delta^{k}_{t} - A_{o\ r}^{\ k} J^{r}_{t} = J^{k}_{t}$$

soll auch die Relation

(2. 16b) $$(A_{o\ m}^{\ r} + \mu_{o\ m}^{\ r}) J^{t}_{r} (A_{o\ t}^{\ s} + \mu_{o\ t}^{\ s}) J^{k}_{s} = 0$$

bestehen. Das sind n^2 Gleichungen, und wegen der Schiefsymmetrie von μ_{ikm} in i, k wird der Tensor μ_{ikm} insgesamt

$$N = \frac{1}{2} n^2(n-1) - n^2 = \frac{1}{2} n^2(n-3).$$

Komponenten haben, die noch frei wählbar sind, doch so, daß (2. 16a) bestehe. Für $n=3$ ist also z. B. μ_{ikm} schon — im allgemeinen Fall — auf Grund der Bedingungen (2. 16b) eindeutig festgelegt.

Jetzt gehen wir zur Bestimmung von L^{*}_{ikm} über. Statt der Gleichung (2. 12) nehmen wir aber die mit (2. 12) äquivalente Relation:

(2. 17) $$\frac{1}{2} \partial_m g_{ik} - A_{ikr} L^{*r}_{o\ m} - L^{*}_{(ik)m} = 0.$$

Aus dieser Gleichung soll also $L^{\bullet}_{ikm}$ bestimmt werden. Es kann leicht verifiziert werden, daß

$$\Gamma^{\bullet}_{ikm} = [ikm] - A_{ikr}\Gamma^{\bullet r}_{o\ m} - A_{kmr}\Gamma^{\bullet r}_{o\ i} + A_{imr}\Gamma^{\bullet r}_{o\ k} \tag{2. 18}$$

mit

$$[ikm] \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\partial_m g_{ik} + \partial_i g_{km} - \partial_k g_{im})$$

eine Lösung von (2. 17) ist, denn substituiert man statt $L^{\bullet}_{ikm}$ die Größe $\Gamma^{\bullet}_{ikm}$ in die Gleichung (2. 17), so wird (2. 17) identisch erfüllt sein. $\Gamma^{\bullet}_{ikm}$ ist in i, m symmetrisch; die allgemeinste Lösung von (2. 17) hat also die Form:

$$L^{\bullet}_{ikm} = \Gamma^{\bullet}_{ikm} + \Lambda_{ikm}, \tag{2. 19}$$

wo aber Λ_{ikm} einen solchen Tensor bedeutet, der so gewählt werden muß, daß die Relation (2. 17) erfüllt sei.

Für die vollständige Bestimmung der Übertragung muß noch $\Gamma^{\bullet}_{ikm}$ durch g_{ik} ausgedrückt, und die Form von Λ_{ikm} bestimmt werden. Nach einer Überschiebung von (2. 18) mit l^i wird:

$$\Gamma^{\bullet}_{ors} H^{rs}{}_{km} = [okm], \qquad [okm] \equiv [ikm]\, l^i, \tag{2. 20}$$

wo

$$H^{rs}{}_{km} \overset{\text{def}}{=} \delta^r_k \delta^s_m + A_{ok}{}^r \delta^s_m + A_{km}{}^r l^s - A_{om}{}^r \delta^s_k$$

bedeutet. Existiert der inverse Tensor von $H^{rs}{}_{km}$, ist also die Gleichung

$$H^{rs}{}_{km} K^{km}{}_{pq} = \delta^r_p \delta^s_q$$

für $K^{km}{}_{pq}$ eindeutig lösbar — was wir im folgenden immer annehmen wollen — so wird nach (2. 20)

$$\Gamma^{\bullet}_{opq} = [okm]\, K^{km}{}_{pq}. \tag{2. 21}$$

Setzt man jetzt diesen Wert von $\Gamma^{\bullet}_{opq}$ in die Gleichung (2. 18) ein, so erhält man $\Gamma^{\bullet}_{ikm}$ ausgedrückt durch den Grundtensor des Raumes.

Wir bestimmen jetzt die Form von Λ_{ikm}. Da $\Gamma^{\bullet}_{ikm}$ eine Lösung von (2. 17) ist, d. h. $\Gamma^{\bullet}_{ikm}$ eine metrische Übertragung bestimmt, so folgt aus den Formeln (2. 17) und (2. 19) für Λ_{ikm} die Relation:

$$\Lambda_{(ik)m} + A_{ikr}\Lambda_o{}^r{}_m = 0. \tag{2. 22}$$

Λ_{ikm} soll jetzt durch seinen in i, k symmetrischen bezw. schiefsymmetrischen Teil dargestellt werden. Es ist

$$\Lambda_{ikm} = \Lambda_{(ik)m} + \sigma_{ikm}, \qquad \sigma_{ikm} = \Lambda_{[ik]m}$$

und nach (2. 22) wird:

$$\Lambda_{ikm} = -A_{ikr}\Lambda_o{}^r{}_m + \sigma_{ikm}.$$

Eine Überschiebung mit l^i ergibt

$$A_o{}^r{}_m(\delta_r^k + A_o{}^k{}_r) = \sigma_o{}^k{}_m. \tag{2.23}$$

Auf Grund von (2. 15) kann aus dieser Gleichung nach einer Überschiebung mit J_k^t der Tensor $A_o{}^t{}_m$ bestimmt werden, und somit bekommt man auch A_{ikm}.

Die allgemeinste metrische Übertragung wird also nach (2. 19) die Form

$$L^*_{ikm} = \Gamma^*_{ikm} - A_{ikr} J_t^r \sigma_o{}^t{}_m + \sigma_{ikm} \tag{2.24}$$

haben, wo Γ^*_{ikm} durch (2. 18) und (2. 21) bestimmt ist, σ_{ikm} aber einen in i, k schiefsymmetrischen, noch frei wählbaren Tensor bedeutet.

Die Übertragung (2. 18) ist im allgemeinen unter den Übertragungen (2. 24) dadurch ausgezeichnet, daß sie in den Indizes i, m symmetrisch ist. Aus der Forderung, daß L^*_{ikm} in i, m symmetrisch sei, folgt nämlich nach (2. 24) auf Grund der Symmetrie von Γ^*_{ikm} in i, m, daß:

$$\sigma_{[i|k|m]} - \sigma_o{}^t{}_{[m} A_{i]kr} J_t^r = 0 \tag{2.25}$$

besteht. Der Tensor σ_{ikm} ist aber in i, k schiefsymmetrisch, somit hat er $1/2\, n^2(n-1)$ Komponenten, während (2. 25) aus n^3 Gleichungen besteht. Somit ist $\sigma_{ikm} = 0$ im allgemeinen die einzige Lösung von (2. 25). Hat aber (2. 25) außer $\sigma_{ikm} = 0$ auch andere Lösungen, dann existieren im Raum $\mathfrak{L}_n$ außer der durch (2. 18) bestimmten Übertragung auch andere symmetrische Übertragungen.

Wäre die Übertragung auf die angegebene Weise nicht bestimmbar, wenn z. B. der Tensor $K^{km}{}_{pq}$ nicht eindeutig bestimmbar wäre, so könnte man auf folgende Weise verfahren.

Wir betrachten die durch (1. 4) gegebene Funktion $F(x, v)$ als die Grundfunktion eines Finslerraumes, und bestimmen dann die Cartanschen Übertragungsparameter $\overset{(F)}{\Gamma}{}^*_{ikm}$. Selbstverständlich bestimmt $\overset{(F)}{\Gamma}{}^*_{ikm}$ bezüglich des metrischen Grundtensors g_{ik} von $\mathfrak{L}_n$ eine nicht-metrische Übertragung. Mit der Methode von A. Kawaguchi können wir dann eine bezüglich g_{ik} metrische Übertragung konstruieren (vgl. [11]). Wir setzen

$$L^*_{ikm} = \overset{(F)}{\Gamma}{}^*_{ikm} + \tau_{ikm}$$

und fordern, daß diese L^*_{ikm} die Gleichung (2. 17) befriedige. Das ergibt für $\tau_{(ik)m}$ die Relation:

$$\frac{1}{2}\partial_m g_{ik} - A_{ikr}(\overset{(F)}{\Gamma}{}^{*r}_{o\ m} + \tau_o{}^r{}_m) - (\overset{(F)}{\Gamma}{}^*_{(ik)m} + \tau_{(ik)m}) = 0.$$

Nun ist

$$\tau_{ikm} = \tau_{(ik)m} + \sigma_{ikm}, \qquad \sigma_{ikm} = \tau_{[ik]m},$$

somit hat man

$$\tau_{ikm} = \frac{1}{2}\,\partial_m g_{ik} - A_{ikr}(\overset{(F)}{\Gamma}{}^{*r}_{o\;m} + \tau_o{}^r{}_m) - \overset{(F)}{\Gamma}{}^{*}_{(ik)m} + \sigma_{ikm}.$$

Nach einer Überschiebung mit l^i erhält man eine Gleichung für $\tau_o{}^r{}_m$, die auf Grund von (2. 15) lösbar ist. Somit erhält man τ_{ikm} und L^{*}_{ikm} ausgedrückt mit σ_{ikm} und mit dem Grundtensor g_{ik} des Raumes $\mathfrak{L}_n$.

Zum Schluß dieses Paragraphen zeigen wir noch, daß die erste kovariante Ableitung des Einheitsvektors l^i identisch verschwindet, wenn die Übertragungsparameter L^{*}_{ikm} durch (2. 24) bestimmt sind. Wir werden im folgenden übrigens immer diesen Fall betrachten.

Nach (1. 5) und (1. 4) hat man in Hinsicht auf (2. 18)

$$\partial_r l^j = -l^j(\Gamma^{*}_{oor} + A_{ook}\Gamma^{*k}_{o\;r}).$$

Drücken wir jetzt Γ^{*}_{ikr} nach (2. 19) mit L^{*}_{ikr} aus, so wird:

$$\partial_r l^j = -l^j(L^{*}_{oor} + A_{ook}L^{*k}_{o\;r}) + l^j A_o{}^k{}_r(l_k + A_{ook}).$$

Nach (2. 23) ist aber wegen der Schiefsymmetrie von σ_{ikm} in i, k

$$A_o{}^k{}_r(l_k + A_{ook}) = 0,$$

somit ist

$$\partial_r l^j = -l^j(L^{*}_{oor} + A_{ook}L^{*k}_{o\;r}). \tag{2.26}$$

Aus den Gleichungen (1. 4) und (1. 5) folgt noch unmittelbar die Formel

$$l^j\|_m = \delta^j_m - l^j(l_m + A_{oom}). \tag{2.27}$$

Aus der Definitionsgleichung (2. 8) der ersten kovarianten Ableitung folgt nun auf Grund von (2. 26) und (2. 27)

$$l^j|_r = 0 \tag{2.28}$$

w. z. b. w. Die Gleichung (2. 28) besteht übrigens auch in den affinen Räumen; nur steht in jenen Räumen statt l^i das Grundelement v^i (vgl. [15] S. 13).

Auf Grund von (1. 4) kann auch leicht die Relation

$$F|_k = 0 \tag{2.29}$$

abgeleitet werden.

§ 3. Transformationsformeln der Grundgrößen.

In den vorigen Paragraphen haben wir die folgenden Grundgrößen in den allgemeinen metrischen Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ eingeführt: 1. den metrischen Grundtensor g_{ik}, 2. den Tensor μ_{ikm}, 3. den Tensor σ_{ikm}. Der Tensor g_{ik} bestimmt dabei die Metrik von $\mathfrak{L}_n$, während μ_{ikm} und σ_{ikm} (die in i, k

schiefsymmetrisch sind) zusammen mit g_{ik} die metrische Übertragung in $\mathfrak{L}_n$ bestimmen. Diese drei Tensoren betrachten wir als die Fundamentaltensoren von $\mathfrak{L}_n$, alle übrigen Größen von $\mathfrak{L}_n$ sollen also immer durch diese Tensoren ausgedrückt werden.

Die anderen Größen, die das invariante Differential im Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ festlegen, haben die folgenden Transformationsgesetze:

$M_j{}^i{}_k$, bzw. $\overline{M}_j{}^i{}_k$ sind Tensoren. Man kann nämlich die Formel (2. 1) als ein invariantes Differential eines affinzusammenhängenden Linienelementraumes betrachten, dann muß aber $M_j{}^i{}_k$ tensoriellen Charakter haben. (Vgl. [15] Gl. (1, 5) auf S. 8.) Aus demselben Grunde hat $L_j{}^i{}_k$ die folgende Transformationsformel (vgl. [15] Gl. (1, 6) auf S. 8):

$$\overline{L}_j{}^i{}_k = L_r{}^s{}_t p_j^r \bar{p}_s^i p_k^t + \overline{M}_r{}^s{}_t p_j^r \bar{p}_s^i (\partial_{\bar{x}^m} p_k^t) \bar{p}_q^m l^q + (\partial_{\bar{x}^k} p_j^r) \bar{p}_r^i, \; p_j^r = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j}, \; \bar{p}_s^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s}. \tag{3. 1}$$

Aus den Formeln (2. 6a) und (2. 6b) folgt nach einer einfachen Rechnung, daß die Größen $L_j^{*}{}^i{}_k$ dieselben Transformationsformeln haben, wie die Übertragungparameter eines Riemannschen Raumes, d. h.

$$\overline{L}_j^{*}{}^i{}_k = L_r^{*}{}^s{}_t p_j^r \bar{p}_s^i p_k^t + \bar{p}_r^i \partial_{\bar{x}^k} p_j^r. \tag{3. 2}$$

Aus der Gleichung (2. 24) folgt, da σ_{ikm}, A_{ikm} und J_t^r offensichtlich Tensoren sind, daß die Transformationsformel von $\Gamma_i^{*}{}^j{}_k$ mit der von $L_i^{*}{}^j{}_k$ übereinstimmt.

B e m e r k u n g 1. Der Tensorcharakter von A_{ijk} folgt unmittelbar aus der Definitionsgleichung (2. 13a), da die Operation „$\|_r$" eine tensorielle Operation ist.

B e m e r k u n g 2. Die Transformationsformeln (3. 1) und (3. 2) könnten selbstverständlich auch aus ihren Definitionsgleichungen (2. 24), (2. 6b) und (2. 10) bestimmt werden.

§ 4. Charakterisierung des Finslerschen Raumes.

Wir wollen in diesem Paragraphen dasjenige Problem näher untersuchen, wie die Finslerräume unter den allgemeinen Linienelementräumen gekennzeichnet sind. Wie wir schon in der Einleitung erwähnt haben, können die Finslerräume durch die Relation (0. 1) charakterisiert werden, wo die Funktion $F(x, v)$ durch (1. 4) angegeben ist. Wir werden aber statt der Bedingung (0. 1) eine einfachere Relation für die Charakterisierung des Finslerraumes unter den allgemeinen Räumen $\mathfrak{L}_n$ bestimmen.

Nach der Gleichung (1. 4) wird in $\mathfrak{L}_n$ allgemein

$$\frac{1}{2} \partial^2_{v^i v^k} F^2 = g_{ik} + v^r \partial_{v^i} g_{rk} + v^s \partial_{v^k} g_{si} + \frac{1}{2} v^r v^s \partial^2_{v^i v^k} g_{rs} \tag{4. 1}$$

bestehen, da g_{rs} in r, s symmetrisch ist. Angenommen daß der betrachtete Raum $\mathfrak{L}_n$ ein Finslerraum ist, so bestehet auch (0. 1); nach den beiden Gleichungen (0. 1) und (4. 1) folgt aber, daß im Finslerraum die Gleichung

$$v^r \partial_{v^i} g_{rk} + v^r \partial_{v^k} g_{ri} + \frac{1}{2} v^r v^s \partial^2_{v^i v^k} g_{rs} = 0 \tag{4. 2}$$

eine Identität ist. Beachten wir jetzt, daß g_{ik} in den v^i homogen von nullter Dimension ist, so folgt aus (4. 2) nach einer Überschiebung mit v^k im Hinblick auf die Eulersche Relation:

$$v^r v^s \partial_{v^i} g_{rs} = 0.$$

Multipliziert man jetzt diese Gleichung mit 1/2 und differenziert man sie partiell nach v^k, so wird wegen der Symmetrie von g_{rs}:

$$\frac{1}{2} v^r v^s \partial^2_{v^i v^k} g_{rs} + v^r \partial_{v^i} g_{rk} = 0. \tag{4. 3}$$

Aus (4. 2) und (4. 3) folgt nun unmittelbar

$$v^r \partial_{v^k} g_{ri} = 0. \tag{4. 4}$$

Diese Relation ist kennzeichnend für den Finslerraum, da aus (4. 4) schon die Relation (0. 1) abgeleitet werden kann. Die Finslerräume können auch durch (4. 4) charakterisiert werden; die Formel (0. 1) kann man dann aus (1. 4) leicht beweisen. Diesen Weg befolgte E. CARTAN in seiner Arbeit [3]. Der von uns benützte Weg war eben die Umkehrung des Cartanschen Weges. Das war uns wegen der Gleichberechtigkeit der Gleichungen (0. 1) und (4. 4) möglich; beide Gleichungen charakterisieren also die Finslerräume unter den allgemeinen metrischen Linienelementräumen $\mathfrak{L}_n$.

§ 5. Autoparallele und extremale Kurven.

Eine Kurve $x^i = x^i(t)$ werden wir in einem allgemeinen Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ immer nur bezüglich einer einparametrigen Folge der Linienelemente $v^i(t)$ erklären (vgl. [10] § 2). Der Parameter t wird als Bogenparameter bezeichnet, falls

$$g_{ik}(x(t), v(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 1$$

ist; nach der Gleichnung (1. 1) wird nämlich in diesem Falle

$$s_{1.2} = t_2 - t_1$$

bestehen. Im folgenden werden wir immer — wenn wir das Gegenteil nicht nachdrücklich bemerken — die Bogenlänge als Parameter wählen, und sie — wie gewöhnlich — mit s bezeichnen.

D e f i n i t i o n. *Der Kurve* $x^i = x^i(s)$ *ist bezüglich des Richtungsfeldes* $v^i(s)$ *eine quasiautoparallele Kurve, falls das invariante Differential des Tangentenvektors*

$$\xi^i = \frac{dx^i}{ds}$$

verschwindet. Ist $v^i = \xi^i$, *so wird* $x^i(s)$ *nur als autoparallele Kurve bezeichnet.*

Die Differentialgleichung der quasiautoparallelen Kurven ist also:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + M_j^{*i}{}_k \frac{dx^j}{ds}\frac{\omega^k(d)}{ds} + L_j^{*i}{}_k \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0. \tag{5.1}$$

Der Wert von $\dfrac{\omega^k(d)}{ds}$ ist nach der Angabe von $v^i(s)$ eindeutig bestimmt. $v^i(s)$ bestimmt nämlich nach (1.5) den Einheitsvektor $l^i(s)$; somit wird nach (2.2) und (2.10) die Formel von $\dfrac{\omega^k(d)}{ds}$ die Gestalt

$$\frac{\omega^k(d)}{ds} = (\delta_j^k + \overline{M}_o{}^k{}_j)\left(\frac{dl^j}{ds} + L_o^{*j}{}_r \frac{dx^r}{ds}\right), \qquad \overline{M}_o{}^k{}_j = M_o^{*k}{}_j \tag{5.2}$$

haben.

Das Feld $v^i(s)$ kann z. B. durch eine natürliche geometrische Forderung festgelegt werden. Fordert man nämlich, daß das Richtungsfeld $v^i(s)$ längs der Kurve $x^i = x^i(s)$ eben mit der Richtung des Tangentenvektors $\xi^i(s)$ identisch sei, d. h.

$$\frac{dx^i}{ds} = l^i(s) = \xi^i(s)$$

bestehe, so ist das Richtungsfeld längs der Kurve $x^i = x^i(s)$ eindeutig bestimmt, und die Differentialgleichung der autoparallelen Kurven wird nach (5.1):

$$\frac{dl^i}{ds} + M_o^{*i}{}_k \frac{\omega^k(d)}{ds} + L_o^{*i}{}_o = 0, \qquad \frac{dl^i}{ds} = \frac{d^2x^i}{ds^2}. \tag{5.3}$$

Aus der Gleichung (5.2) bekommt man aber nach einer Überschiebung mit $(\delta_k^i - M_o^{*i}{}_k)$ auf Grund der Gleichung (2.3a)

$$\frac{dl^i}{ds} + L_o^{*i}{}_o = \frac{\omega^k(d)}{ds}(\delta_k^i - M_o^{*i}{}_k), \tag{5.4}$$

und somit wird aus der Gleichungen (5.3) und (5.4):

$$\frac{\omega^i(d)}{ds} = 0. \tag{5.5}$$

Diese Gleichungen sind also die Differentialgleichungen der autoparallelen Kurven, falls $l^i = \xi^i$ besteht. Diese Gleichungen können noch in der äquivalenten Form

(5. 5a)
$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+L_j^{*i}{}_k\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0$$

geschrieben werden, wie das nach einer Überschiebung von (5. 2) mit $(\delta^i_k-\overline{M}_{,}{}^i{}_k)$ sofort verifiziert werden kann (vgl. [10] § 6).

* * *

Wir gehen jetzt zur Bestimmung der Differentialgleichung der extremalen Kurven über. Durch die Formel (1. 1) ist die Bogenlänge einer Kurve bezüglich des Richtungsfeldes $v^i(s)$ festgelegt. Wir wollen jetzt das Richtungsfeld mit Hilfe der Kurve $x^i=x^i(s)$ längs dieser Kurve in der Form

$$v^i=v^i(x,x'),\quad x'^k=\frac{dx^k}{ds}$$

festlegen, wo der Strich jetzt und im folgenden die Ableitung nach dem Parameter s, also die Ableitung nach der Bogenlänge bezeichnet. Wegen der Wahl des Parameters hat man also

(5. 6)
$$F(x,x')\overset{\text{def}}{=}\sqrt{g_{ij}(x,v(x,x'))x'^ix'^k}=1.$$

D e f i n i t i o n. *Eine extremale Kurve, oder kurz Extremale des allgemeinen metrischen Linienelementraumes* $\mathfrak{L}_n$ *ist die Lösungskurve des Variationsproblems:*

$$\delta\int_{s_0}^{s_1}F(x,x')ds=0,$$

wo F *durch* (5. 6) *angegeben ist.*

Die Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen dieses Variationsproblems sind auf Grund von (5. 6):

(5. 7)
$$\xi^i\xi^j\left(\frac{1}{2}\partial_kg_{ij}+A_{ijr}\partial_kv^r\right)-\frac{d}{ds}(A_{ijr}(\partial_{x'^k}v^r)\xi^i\xi^j+\xi_k)=0,\quad \partial_{x'^k}=\frac{\partial}{\partial_{x'^k}},$$

wo

$$\xi^i=x'^i=\frac{dx^i}{ds},\quad \xi_k=g_{ik}\xi^i$$

den Tangentenvektor der Extremale bedeutet.

Wir werden jetzt die Gleichung (5. 7) umformen. Auf Grund der Definition des invarianten Differentials, bekommt man für den kovarianten Vektor ξ_k:

(5. 8)
$$\frac{d\xi_k}{ds}=\frac{D\xi_k}{ds}+L^*_{kij}\xi^i\xi^j+M^*_{kij}\xi^i\frac{\omega^j(d)}{ds}.$$

Nach den Gleichungen (2. 18) und (2. 24) und wegen der Schiefsymmetrie des Tensors σ_{ijk} in i, j wird

$$\frac{1}{2}\xi^i\xi^j\partial_{x^k}g_{ij}=(L^*_{ijk}+A_{ijr}J^r_t\sigma_o{}^t{}_k+A_{ijr}\Gamma^{*r}_{o\ k})\xi^i\xi^j. \tag{5.9}$$

Substituiert man die entsprechenden Werte aus (5. 8) und (5. 9) in die Gleichung (5. 7), so bekommt man die allgemeinste Form der Differentialgleichungen der extremalen Kurven. Es wird:

$$\frac{D\xi_k}{ds}+[2L^*_{[k|i|j]}-A_{ijr}(J^r_t\sigma_o{}^t{}_k+\Gamma^{*r}_{o\ k}+\partial_k v^r)]\xi^i\xi^j+ \tag{5.10}$$
$$+M^*_{kij}\xi^i\frac{\omega^j(d)}{ds}+\frac{d}{ds}(A_{ijr}\xi^i\xi^j\partial_{x'^k}v^r)=0,\quad \xi_k=g_{ik}\frac{dx^i}{ds}.$$

Wir werden zwei Spezialfälle näher betrachten. Im Falle A nehmen wir an, daß das Richtungsfeld v^i allein von x^i abhängig ist. Im Falle B nehmen wir an, daß das Richtungsfeld v^i mit dem Richtungsfeld des Tangentenvektors $\xi^i(s)$ zusammenfällt.

Der Fall A. Unsere Annahme ist also in diesem Falle, daß

$$v^i=v^i(x)$$

ein allein wom Orte abhängiger Vektor ist. Da wegen der Wahl des Parameters längs der Extremale $v^i=l^i$ ist, kann

$$\nabla_k v^r\stackrel{\text{def}}{=}\partial_k v^r+\Gamma^{*r}_{j\ k}v^j=\partial_k v^r+\Gamma^{*r}_{o\ k}$$

gesetzt werden. Nach der Transformationsformel (3. 2) folgt unmittelbar, daß $\nabla_k v^r$ einen Tensor bestimmt. Die Operation „∇_k" kann übrigens als ein Spezialfall der kovarianten Ableitung (2. 8) betrachtet werden; denn aus (2. 8) erhält man eben die genannte Operation, wenn statt der Übertragungsparameter L^*_{ijk} die Übertragungsparameter Γ^*_{ijk} genommen werden. Nach (2. 24) ist also die Operation „∇_k" eine kovariante Ableitung, für die $\sigma_{ijk}=0$ gilt.

Die Differentialgleichung der Extremalen wird nach (5. 10) in diesem Falle die Form:

$$\frac{D\xi_k}{ds}+[2L^*_{[k|i|j]}-A_{ijr}(J^r_t\sigma_o{}^t{}_k+\nabla_k v^r)]\xi^i\xi^j+M^*_{kij}\xi^i\frac{\omega^j(d)}{ds}=0.$$

haben. Wir bemerken hier, daß diese Gleichung formal auch die von J. G. FREEMAN bestimmte in sich enthält (vgl. [9] Gleichung (4. 2)). Analog den autoparallelen Kurven können die durch (5. 10) bestimmten Kurven *Quasiextremalen* bezeichnet werden, während die *Extremalen* durch $v^i=x'^i$ charakterisiert sind.

Der Fall B. Dieser Fall ist durch die Relation

$$\eta^i = \xi^i = x'^i = l^i \tag{5. 11}$$

charakterisiert. Aus (5. 10) bekommt man nach Heraufziehen des Indexes k wegen (5. 11):

$$\frac{\omega^j(d)}{ds}(\delta_j^k + M^{*k}{}_{oj}) + 2L^{*[k|o|o]} - A_{oor}(J_t^r \sigma_o{}^{tk} + \Gamma^{*ork}) + g^{jk}\frac{dA_{ooj}}{ds} = 0.$$

Drückt man jetzt $\frac{dA_{ooj}}{ds}$ mit Hilfe des invarianten Differentials aus, ebenso, wie vorher $\frac{d\xi_k}{ds}$ mittels (5. 8) bestimmt wurde, so wird:

$$\frac{\omega^j(d)}{ds}(\delta_j^k + M^{*k}{}_{oj} + M^{*kr}{}_j A_{oor}) + 2L^{*[k|o|o]} + \\ + A_{oor}(L^{*kro} - J_t^r \sigma_o{}^{tk} - \Gamma^{*ork}) + \frac{DA^{ook}}{ds} = 0. \tag{5. 12}$$

Im Falle $\sigma_{ijk} = 0$, also für eine symmetrische Übertragung hat (5. 12) die einfache Form:

$$\frac{\omega^j(d)}{ds}(\delta_j^k + M^{*k}{}_{oj} + M^{*kr}{}_j A_{oor}) + \frac{DA^{ook}}{ds} = 0. \tag{5. 12a}$$

Es kann leicht verifiziert werden, daß diese Gleichung die unmittelbare Verallgemeinerung der in unserem Aufsatz [10] für die Extremalen abgeleiteten Differentialgleichung ist (vgl. (6. 12) von [10]). Um die Differentialgleichung (6. 12) von [10] zu erhalten, müßte man in (5. 12a) für die Übertragungsparameter M^*_{ijk} bzw. für den Torsionstensor A_{ijk} die Bedingungen

$$M^*_{ijk} = A_{ijk}, \qquad A_{ojk} = p\, l_j A_k$$

stellen und dann (5. 12a) für $\frac{\omega^k(d)}{ds}$ auflösen.

Im Falle $\sigma_{ijk} = 0$ wollen wir noch die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für $\mathfrak{L}_n$ angeben, daß die autoparallelen Kurven C_n gleichzeitig Extremalen seien. Nach (5. 5) und (5. 12a) soll offenbar $\frac{DA^{ook}}{ds} = 0$ längs jeder autoparallelen Kurve bestehen. Beachtet man, daß nach unserer Forderung $\frac{\omega^j(d)}{ds} = 0$ die einzige Lösung von (5. 12a) sein soll, so kann folgendes Theorem behauptet werden:

Theorem A. *Ist* $\sigma_{ijk}=0$, *und ist* $\bar{v}^i=x'^i$, *so sind die autoparallelen Kurven* C_a *des Raumes* $\mathfrak{L}_n$ *mit den Extremalen identisch, falls die Relationen*

$$\operatorname{Det}|\delta_j^k+M^{*k}{}_{oj}+M^{*kr}{}_j A_{oor}|\neq 0,\quad \frac{DA^{ook}}{ds}=0$$

längs C_a *bestehen.*

§ 6. Beispiele.

In diesem Paragraphen wollen wir durch einige Beispiele die Erfüllbarkeit der gestellten Bedingungen beweisen.

A) Der Fall des Finslerschen Raumes.* Wie im § 4. gezeigt wurde, kann dieser Fall durch (4. 4) charakterisiert werden. Die durch (2. 16) und (2. 24) bestimmte Übertragung ist aber eine Verallgemeinerung der Cartanschen Übertragung. Auf Grund von (4. 4) ist nach (2. 15) $J_k^t=\delta_k^t$; somit erhält man für die Übertragungsparameter folgende Relationen:

$$M^*_{ikm}=A_{ikr}(\delta_m^r-\mu_o{}^r{}_m)+\mu_{ikm},\quad L^*_{ikm}=\Gamma^*_{ikm}-A_{ikr}\sigma_o{}^r{}_m+\sigma_{ikm}. \tag{6. 1}$$

Aus (2. 16b) erhält man für μ_{orm} eine Gleichung, die etwa durch die Forderung

$$\mu_{irm}=h_{[i}l_{r]}k_m$$

erfüllbar ist, wenn h_i, k_m, l_r drei aufeinander orthogonale Vektoren bestimmen. Möglicherweise kann statt des Vektors l_t auch k_t gesetzt werden; dann wird $\mu_{orm}=0$ bestehen.

B) Der Fall* $A_o{}^i{}_k=pl^iA_k$. Die symmetrische Übertragung ist in [10] in diesem Falle ausführlich behandelt. Wir verweisen noch darauf, daß dieser Fall formal mit der von J. A. Schouten und J. Haantjes zuerst entwickelten Geometrie (vgl. [13] und [5]) übereinstimmt. Im folgenden wollen wir in erster Reihe die Abweichung dieser Übertragung vom symmetrischen Fall angeben.

Aus der Gleichung (2. 15) folgt, daß J_k^t die Form

$$J_k^t=\delta_k^t-pl^tA_k\equiv\delta_k^t-A_o{}^t{}_k$$

hat. Die Übertragungsparameter erhält man aus (2. 16) und (2. 24) wieder in der Form (6. 1). Für den Tensor μ_{ikm} ergibt aber die Relation (2. 16b) n^2 Bedingungsgleichungen, wie im allgemeinen Fall.

Für L^*_{ijk} ist der in i, k symmetrische Fall im allgemeinen durch $\sigma_{ijk}=0$ charakterisiert. Die explizite Form der symmetrischen Übertragungsparameter kann nach der Methode von [10] berechnet werden (vgl. [10] (3, 15)—(3, 22)].

Es ist

$$\Gamma^{*}_{ijk} = [ijk] - \langle A_{ijm}\{{}_{o}{}^{s}{}_{r}\}[(\delta^{r}_{k} - l^{r} l_{k})\delta^{m}_{s} + + K^{t}_{q}(l^{r} g_{st} + p\delta^{r}_{t} A_{s})(l_{k} g^{mq} - A_{k}{}^{mq})]\rangle - \langle ijk\rangle, \tag{6.2}$$

wo $\langle ijk\rangle$ noch zwei weitere Glieder mit zyklischer Permutation von i, j, k bedeutet, in denen aber vor dem letzten Glied auch das Vorzeichen noch geändert ist. Der Tensor K^{t}_{q} ist durch die Relationen

$$(\delta^{r}_{t} + pA_{s}A_{t}{}^{sr})K^{t}_{q} = \delta^{r}_{q}$$

festgelegt.

C) Der Fall* $\mu_{o}{}^{k}{}_{m} = 0$. Wählt man für $\mu_{i}{}^{k}{}_{m}$ einen Tensor für den $\mu_{o}{}^{k}{}_{m} = 0$ besteht, so ergibt (2.16b) eine Bedingung für den Tensor $A_{o}{}^{r}{}_{m}$. Wenn

$$J^{k}_{r}\varphi^{p}_{k} = \delta^{p}_{r}$$

für den Tensor φ^{p}_{t} lösbar ist, so daß

$$\mathrm{Det}\,|J^{t}_{r}| \neq 0$$

besteht, erhält man aus (2.16b) nach einer Überschiebung mit φ^{p}_{t} die Formel

$$A_{o}{}^{r}{}_{m} J^{t}_{r} A_{o}{}^{p}{}_{t} = 0.$$

Diese Formel ergibt mit (2.16) zusammen:

$$M^{*k}_{o\ \ m} = A_{o}{}^{k}{}_{m},$$

wie man das nach einer Kontraktion von (2.16) mit l^{i} sofort verifizieren kann. Die Bedingung (2.3b) wird somit nach $M^{*k}_{o\ \ m} = \bar{M}_{o}{}^{k}{}_{m}$ mit

$$A_{o}{}^{i}{}_{r} A_{o}{}^{r}{}_{k} = 0$$

äquivalent.

D) Der Fall* $M^{*k}_{o\ \ m} = l^{k} A_{m}$. Es wird auf Grund von (2.14)

$$l^{k} A_{m} \equiv M^{*k}_{o\ \ m} = A_{o}{}^{k}{}_{m} + \mu_{o}{}^{k}{}_{m}. \tag{6.3}$$

Nach einer Überschiebung mit l_{k} wird im Hinblick auf die Schiefsymmetrie von μ_{ikm} in den Indizes i, k:

$$A_{m} = A_{oom}. \tag{6.4}$$

Nach der Gleichung (2.13) erhält man wegen der speziellen Form des Tensors $M^{*k}_{o\ \ m}$:

$$M^{*}_{ikm} = A_{ikm} + \mu_{ikm} \tag{6.5}$$

Auf Grund von (6.3) und (6.4) könnte für μ_{ikm} etwa die Formel

$$\mu_{ikm} = 2 l_{[k} A_{|o|i]m} \tag{6.6}$$

gewählt werden. Die Bedingung (2.3b) ist wegen $\bar{M}_{o}{}^{j}{}_{i} = M^{*j}_{o\ \ i}$ und auf Grund von (6.5) und (6.6) identisch erfüllt.

§ 7. Bestimmung der Torsion und der Krümmung des Raumes.

Die Torsions- und die Krümmungstensoren des Raumes werden wir mit Hilfe der Cartanschen ω-Symbolik der äußeren Produkte und der äußeren Ableitungen Pfaffscher Formen bestimmen (vgl. [4] Chap. VIII, [1] S. 209—210).[4]) Die Theorie der Pfaffschen Formen setzen wir als bekannt voraus.

Die Torsionstensoren des metrischen Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$ können nach der Cartanschen Methode durch Berechnung der Pfaffschen Form:

(7. 1) $$\Omega^i \overset{\text{def}}{=} (\varDelta D - D\varDelta) x^i$$

berechnet werden, wo „d“ und „δ“ die zur invarianten Differentiale „D“ und „$\varDelta$“ gehörigen vertauschbaren Differentialen bedeuten. Da x^i ein Skalar ist, wird $Dx^i = dx^i$ bestehen; somit bekommt man aus (7. 1) und (2. 4)

(7. 2a) $$\Omega^i = [dx^t \omega_t^{\ i}(d)],$$

oder in ausführlicher Form nach (2. 5) wird:

(7. 2b) $$\Omega^i = M_j^{*i}{}_k [dx^j \omega^k] + \Omega_j^{*i}{}_k [dx^j dx^k],$$

wo

(7. 3) $$\Omega_j^{*i}{}_k = L^{*}_{[j}{}^{i}{}_{k]}$$

bedeutet. Der Tensor $M_j^{*i}{}_k$ ist der Tensor der Raumtorsion; den Tensor $\Omega_j^{*i}{}_k$ bezeichnen wir auf Grund der Gleichung (7. 3) als den Tensor der Übertragungstorsion. Der Tensor $M_j^{*i}{}_k$ bestimmt nämlich nach (2. 16) für $\mu_{ikm} = 0$, die Abweichung des Raumes $\mathfrak{L}_n$ von einem Riemannschen Raum. In einem Riemannschen Raum ist nämlich $A_{ikr} = 0$; somit verschwindet auch $M_j^{*i}{}_k$. Die Relation (7. 3) zeigt, daß der Tensor $\Omega_j^{*i}{}_k$ die Abweichung der Übertragung vom symmetrischen Fall charakterisiert.

Die Krümmungstensoren des metrischen Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$ kann man durch Berechnung der Formel

$$(\varDelta D - D\varDelta)\xi^i = \Omega_j^{\ i}(d, \delta)\xi^j$$

bestimmen, wo nach (2. 4)

(7. 4) $$\Omega_j^{\ i} \overset{\text{def}}{=} [\Omega_j^{\ k} \omega_k^{\ i}] - (\omega_j^{\ i})'$$

ist. Bei der ausführlichen Berechnung von $\Omega_j^{\ i}$ muß die Homogenität nullter Ordnung der Größen in den v^i, die Formel:

$$dQ ::. = (\partial_t Q ::. - Q ::. \|_m L_o^{*m}{}_t) dx^t + Q ::. \|_m (\delta_t^m - M_o^{*m}{}_t) \omega^t(d)$$

— die für jede Größe $Q ::.$ besteht, wenn $Q ::.$ in den v^i homogen von nullter Dimension ist — beachtet werden, weiter muß man bei der Bestimmung

---

[4]) [1] gibt nur eine kurze Zusammenfassung der Theorie der Pfaffschen Formen, die aber für unsere Untersuchungen schon hinreichend ist. (Vgl. [1] § 9.)

des vollständigen Krümmungstensors (2. 26) und (2. 27) anwenden, und die Identitäten

$$\omega^o = 0, \quad M_o{}^{*r}{}_m(l_r + A_{oor}) = A_{oom}$$

benützen. Der erste dieser beiden letzten Identitäten folgt offenbar aus der Definition von ω^i im Hinblick auf die Relation: $Dg_{ik} = 0$, während die zweite aus (2. 14) nach Überschiebung mit l_k unmittelbar verifiziert werden kann:

Es wird somit:

(7. 5) $$\Omega_j{}^i = \frac{1}{2} R_j{}^i{}_{ts}[dx^t dx^s] + P_j{}^i{}_{ts}[dx^t \omega^s] + \frac{1}{2} \bar{S}_j{}^i{}_{ts}[\omega^t \omega^s],$$

wo

(7. 6) $$R_j{}^i{}_{ts} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{R}_j{}^i{}_{ts} + M_j{}^{*i}{}_r(\delta^r_p + M_o{}^{*r}{}_p)\bar{R}_o{}^p{}_{ts}$$

mit

(7. 7) $$\frac{1}{2} \bar{R}_j{}^i{}_{ts} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{[s} \overset{*}{L}_{|j|}{}^i{}_{t]} - \overset{*}{L}_o{}^m{}_{[s} \overset{*}{L}_{|j|}{}^i{}_{t]}\|_m + \overset{*}{L}_m{}^i{}_{[s} \overset{*}{L}_{|j|}{}^m{}_{t]},$$

(7. 8) $$P_j{}^i{}_{ts} \stackrel{\text{def}}{=} L_j{}^{*i}{}_t\|_m(\delta^m_s - M_o{}^{*m}{}_s) - M_j{}^{*i}{}_s|_t - M_j{}^{*i}{}_r(M_o{}^{*r}{}_p|_t - L_k{}^{*m}{}_t\|_p l^k(\delta^r_m + M_o{}^{*r}{}_m))(\delta^p_s - M_o{}^{*p}{}_s),$$

(7. 9) $$\frac{1}{2} \bar{S}_j{}^i{}_{ts} \stackrel{\text{def}}{=} M_j{}^{*i}{}_{[t}\|_{|r|}(\delta^r_{s]} - \overset{*}{M}_{|o|}{}^r{}_{s]}) - M_j{}^{*i}{}_r M_o{}^{*r}{}_q\|_p(\delta^p_{[t} - M_o{}^{*p}{}_{[t})(\delta^q_{s]} - M_{|o|}{}^{*q}{}_{s]}) + M_j{}^{*m}{}_{[t} \overset{*}{M}_{|m|}{}^i{}_{s]}$$

bezeichnet. $R_j{}^i{}_{ts}$ ist der vollständige Riemannsche Krümmungstensor, $\bar{R}_j{}^i{}_{ts}$ der Hauptkrümmungstensor des Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$. Beide Krümmungstensoren, zusammen mit $\bar{S}_j{}^i{}_{ts}$ sind in t, s schiefsymmetrisch.

Auf Grund der Identität:

$$(\Delta D - D\Delta)g_{ik} \equiv -2\Omega_{(ik)} = 0$$

folgt, daß die Krümmungstensoren (7. 6), (7. 8) und (7. 9) in den ersten beiden Indizes schiefsymmetrisch sind. Die Formel (7. 5) bestimmt die Krümmungstensoren wegen $\omega^o = 0$ nicht eindeutig. Durch die Forderung

(7. 8a) $P_j{}^i{}_{to} = 0,$ (7. 8b) $\bar{S}_j{}^i{}_{to} = 0$

wird die Zerlegung (7. 5) eindeutig. Nach (2. 1a) und (2. 28) folgt, daß (7. 8a) erfüllt ist. Für den Tensor $\bar{S}_j{}^i{}_{to}$ erhält man aber nach (2. 27):

$$\bar{S}_j{}^i{}_{to} = M_j{}^{*i}{}_t.$$

Für die Eindeutigkeit der Zerlegung (7. 5) müßte man also statt des Tensors (7. 9) den Tensor

$$S_j{}^i{}_{ts} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{S}_j{}^i{}_{ts} - 2M_j{}^{*i}{}_{[t} l_{s]}$$

einführen.

Wir zeigen noch, daß der vollständige Riemannsche Krümmungstensor und der Hauptkrümmungstensor miteinander gleichwertig sind.

Da aus $\overline{R}_j{}^i{}_{ts}$ nach (7. 6) der Tensor $R_j{}^i{}_{ts}$ bestimmbar ist, müssen wir noch zeigen, daß auch $R_j{}^i{}_{ts}$ den Tensor $\overline{R}_j{}^i{}_{ts}$ bestimmt. Überschiebt man die Relation (7. 6) mit

$$l^j(\delta_i^k - M_o{}^{*k}{}_i),$$

so wird nach (2. 3b):

$$\overline{R}_o{}^k{}_{ts} = R_o{}^m{}_{ts}(\delta_m^k - M_o{}^{*k}{}_m).$$

Substituiert man das in (7. 6), so wird

$$\overline{R}_j{}^i{}_{ts} = R_j{}^i{}_{ts} - M_j{}^{*i}{}_m R_o{}^m{}_{ts}, \tag{7. 10}$$

und das beweist unsere Behauptung.

§ 8. Bianchische Identitäten der Krümmungstensoren.

Bei der Untersuchung der Bewegungsgruppen von $\mathfrak{L}_n$ werden wir die Bianchischen Identitäten der Krümmungstensoren (7. 6) und (7. 7) benötigen. Wir können ebenso verfahren, wie E. CARTAN im Riemannschen, bzw. im Finslerschen Raum verfuhr (vgl. [3], [4]).

Bilden wir die äußere Ableitung von (7. 2b), so wird im Hinblick auf (7. 4):

$$(\Omega^i)' - [dx^t \Omega_t{}^i] + [\omega_t{}^i \Omega^t] = 0. \tag{8. 1}$$

Bilden wir jetzt die äußere Ableitung von (7. 4), so wird:

$$(\Omega_j{}^i)' + [\omega_k{}^i \Omega_j{}^k] - [\omega_j{}^k \Omega_k{}^i] = 0. \tag{8. 2}$$

Aus den Identitäten (8. 1) und (8. 2) erhält man die Bianchischen Identitäten für den vollständigen Riemannschen Krümmungstensor nach einer Substitution $\omega^k = 0$. In tensorieller Form geschrieben wird:

$$\frac{1}{2}(R_m{}^i{}_{jk} - M_m^{*i}{}_t R_o{}^t{}_{jk}) - \Omega_j^{*i}{}_k|_m - 2\Omega_t^{*i}{}_k \Omega_j^{*t}{}_m + \{\text{zykl.}\}_{mjk} = 0, \tag{8. 3}$$

$$R_j{}^i{}_{km}|_r + P_j{}^i{}_{kt} R_o{}^t{}_{mr} + 2R_j{}^i{}_{kt}\Omega_m^{*t}{}_r + \{\text{zykl.}\}_{kmr} = 0, \tag{8. 4}$$

wo $\{\text{zykl.}\}_{mjk}$ die zyklische Permutation der Indizes m, j, k bedeutet und $\Omega_j^{*i}{}_k$ durch (7. 3) angegeben ist.

Die Bianchischen Identitäten des Hauptkrümmungstensors (7. 7) können mit Hilfe gewisser Vertauschungsformeln abgeleitet werden. Die Methode, die wir anwenden wollen, hat für den Cartanschen Raum E. T. DAVIES entwickelt (vgl. [6] S. 24).

Ist $\zeta_i(x, v)$ ein kovarianter Vektor in $\mathfrak{L}_n$, so sind für ζ_i *die Identitäten von Ricci:*

$$2\zeta_i|_{[j|k]} = -\zeta_r \overline{R}_i{}^r{}_{jk} - \zeta_i||_r \overline{R}_o{}^r{}_{jk} - 2\zeta_i|_r \Omega_j^{*r}{}_k. \tag{8. 5}$$

Offenbar kann man die Identitäten von Ricci auch auf beliebigen Tensoren erweitern. Nach einer kleinen Rechnung kann die Vertauschungsformel

$$\zeta_i|_k\|_m - \zeta_i\|_m|_k = -\zeta_r \overset{*}{L}{}_i{}^r{}_k\|_m - \zeta_i\|_r \overset{*}{L}{}_s{}^r{}_k\|_m l^s \tag{8.6}$$

leicht verifiziert werden. Differenziert man jetzt (8. 5) kovariant nach x^l, permutiert man dann die Indizes j, k, l zyklisch, beachtet man noch (8. 6) und die Identitäten von Ricci für den Tensor $\zeta_i|_j$, so wird im Hinblick auf (8. 3) und (7. 10)

$$\zeta_r(\overline{R}_i{}^r{}_{jk}|_l + \overset{*}{L}{}_i{}^r{}_j\|_t \overline{R}_o{}^t{}_{kl} + 2\overline{R}_i{}^r{}_{jt}\overset{*}{\Omega}{}_k{}^t{}_l + \{\text{zykl.}\}_{jkl}) +$$
$$+ \zeta_i\|_r(\overline{R}_o{}^r{}_{jk}|_l + \overset{*}{L}{}_s{}^r{}_j\|_t l^s \overline{R}_o{}^t{}_{kl} + 2\overline{R}_o{}^r{}_{jt}\overset{*}{\Omega}{}_k{}^t{}_l + \{\text{zykl.}\}_{jkl}) = 0.$$

Da ζ_r in dieser Formel beliebig gewählt werden kann, hat man:

$$\overline{R}_i{}^r{}_{jk}|_l + \overset{*}{L}{}_i{}^r{}_j\|_t \overline{R}_o{}^t{}_{kl} + 2\overline{R}_i{}^r{}_{jt}\overset{*}{\Omega}{}_k{}^t{}_l + \{\text{zykl.}\}_{jkl} = 0. \tag{8.7}$$

Diese Gleichungen sind die Bianchischen Identitäten für den Hauptkrümmungstensor $\overline{R}_i{}^j{}_{kl}$. Wir bemerken noch, daß auf Grund von (7. 10) im wesentlichen auch die Identitäten (8. 3) für den Hauptkrümmungstensor bestehen.

II. TEIL. UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE BEWEGUNGSGRUPPEN DER ALLGEMEINEN METRISCHEN LINIENELEMENTRÄUME.

§ 9. Infinitesimale Transformationen. Liesche Ableitung.

Die Transformation

$$\overline{x}^i = x^i + \xi^i(x)\delta t \tag{9.1}$$

nennt man eine infinitesimale Transformation, falls δt infinitesimal ist. Für Linienelemente (x, v) bestimmt (9. 1) auf Grund der Transformationsformel

$$\overline{v}^i = v^r \partial_r \overline{x}^i$$

der Linienelemente eine Transformationsformel von der Form:

$$\overline{x}^i = x^i + \xi^i(x)\delta t, \quad \overline{v}^i = v^i + v^r \partial_r \xi^i \delta t. \tag{9.2}$$

In unserem Raum $\mathfrak{L}_n$ bedeutet eine Transformation der Grundelemente immer die erweiterte Transformation (9. 2).

Die Liesche Ableitung eines geometrischen Objektums Ω bezüglich der Transformationsformel (9. 2) ist durch

$$\Delta\Omega = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\Omega(\overline{x}, \overline{v}) - \overline{\Omega}(\overline{x}, \overline{v})}{\delta t} \tag{9.3}$$

bestimmt (vgl. etwa [14] S. 76). Die Liesche Ableitung eines kovarianten

Vektors η_i bekommt man in tensorieller Form, wenn man die Größen $\partial_k \eta_i$ und $\partial_k \xi^i$ nach (2.8) mit Hilfe der ersten kovarianten Ableitung ausdrückt. Es ist

$$\varDelta \eta_i = \eta_i|_m \xi^m + \eta_i\|_m (\xi^m|_o - 2\Omega_t^{*m}{}_o \xi^t) + \eta_m (\xi^m|_i - 2\Omega_t^{*m}{}_i \xi^t).$$

Für einen allgemeinen Tensor $T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$ hat man:

$$\varDelta T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}|_m \xi^m + T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}\|_m (\xi^m|_o - 2\Omega_t^{*m}{}_o \xi^t) - \tag{9.4}$$
$$- \sum_k T^{i_1 \ldots i_{k-1} m i_{k+1} \ldots i_r}_{j_1 \ldots \ldots \ldots \ldots j_s} (\xi^{i_k}|_m - 2\Omega_t^{*i_k}{}_m \xi^t) + \sum_k T^{i_1 \ldots \ldots \ldots \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_{k-1} m j_{k+1} \ldots j_s} (\xi^m|_{j_k} - 2\Omega_t^{*m}{}_{j_k} \xi^t).$$

Ist die Übertragung symmetrisch, so erhält man aus (9.4) eben die Formel (4.1) von [14]. Das zeigt unmittelbar, daß die Formel (9.4) nicht nur in den metrischen Räumen gültig ist, sondern auch in den allgemeinen nicht-symmetrischen affinzusammenhängenden Räumen besteht.

Wir werden noch die Liesche Ableitung der Übertragungsparameter $L_i^{*j}{}_k$ benötigen. Nach der Transformationsformel (3.2) von $L_i^{*j}{}_k$ ergibt (9.3) die Formel:

$$\varDelta L_i^{*j}{}_k = \xi^j|_i|_k + \bar{R}_i{}^j{}_{kr} \xi^r + L_i^{*j}{}_k\|_r (\xi^r|_o + 2\Omega_o^{*r}{}_t \xi^t) + 2\Omega_i^{*j}{}_r \xi^r|_k + 2\Omega_i^{*j}{}_r|_k \xi^r. \tag{9.5}$$

Offenbar ist auch diese Formel die Verallgemeinerung des symmetrischen Falles (wir haben nämlich die metrischen Eigenschaften der Übertragung nicht benützt)[5].

§ 10. Die Bewegungsgruppe und deren Integrabilitätsbedingungen.

Eine Bewegung im metrischen Linienelementraume $\mathfrak{L}_n$ bedeutet eine Punkttransformation, der die Bogenlänge aller Kurven invariant läßt; dabei verstehen wir jetzt unter Kurve eine einparametrige Folge $(x^i(t), v^i(t))$ der Linienelemente, für die

$$\frac{dx^i}{dt} = \varrho(t)\, v^i(t)$$

besteht. (t bedeutet hier einen allgemeinen Parameter.) Da nach der Formel (1.1)

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{ik}(x, \dot{x}) \dot{x}^i \dot{x}^k, \qquad \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$$

besteht, ist $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ bei einer Bewegung eine Invariante. Ist also die infinite-

---

[5]) Gy. Soós hat die Liesche Ableitung in einer noch nicht veröffentlichten Arbeit für sehr allgemeine Räume, sog. ω-Räume behandelt. (Gy. Soós, Über die geometrischen Objekte allgemeiner differentialgeometrischer Räume. I, II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* im Erscheinen).

simale Transformation (9. 1) eine Bewegung, dann ist

$$\dot{\bar{s}}^2 - \dot{s}^2 = 0.$$

Ebenso wie in einem Finslerraum erhält man aus dieser Gleichung mit der Vernachlässigung der höheren Potenzen von δt (vgl. [12] S. 556—557):

$$g_{rk}\partial_i\xi^r + g_{ir}\partial_k\xi^r + \xi^r\partial_r g_{ik} + g_{ik}\|_m l^r \partial_r \xi^m = 0.$$

Nach der Gleichung (9. 3) oder (9. 4) kann leicht verifiziert werden, daß unsere letzte Formel mit

$$(10.1) \qquad \varDelta g_{ik} = 0$$

identisch ist. Nach (9. 4) ist (10. 1) wegen $g_{ik}|_m = 0$ mit

$$(10.2) \qquad \xi_{(i|k)} + A_{ikm}(\xi^m|_o - 2\overset{*}{\Omega}{}_t{}^m{}_o\xi^t) - 2\overset{*}{\Omega}{}_{t(ik)}\xi^t = 0, \quad \xi_i = g_{ik}\xi^k$$

äquivalent[6]). Diese Gleichungen sind die Killingschen Gleichungen in $\mathfrak{L}_n$.

Bestimmt also eine infinitesimale Transformation (9. 1) eine Bewegung im Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$, so befriedigt der Vektor $\xi^i(x)$ das Differentialgleichungssystem (10. 2).

Um die Integrabilitätsbedingungen von (10. 1) bestimmen zu können, benötigen wir noch zwei Vertauschungsformeln, undzwar

$$(10.3) \qquad \varDelta(\eta_{ij}|_k) - (\varDelta\eta_{ij})|_k = -\eta_{ir}\varDelta \overset{*}{L}{}_j{}^r{}_k - \eta_{rj}\varDelta \overset{*}{L}{}_i{}^r{}_k - \eta_{ij}\|_r l^t \varDelta \overset{*}{L}{}_t{}^r{}_k$$

und

$$(10.4) \qquad \partial_{\dot{v}^k}\varDelta\eta_{ij} - \varDelta\partial_{\dot{v}^k}\eta_{ij} \equiv 0,$$

wo η_{ij} einen beliebigen kovarianten Tensor zweiter Stufe bedeuten kann. Die Identität (10. 3) erhält man bei der Beachtung von (9. 4), im Hinblick auf die Identitäten von Ricci und nach der Formel (9. 5). Die Identitäten von Ricci müssen selbstverständlich für einen Tensor zweiter Stufe angewandt werden; die Relation (8. 5) ergibt sie nämlich bloß für einen Vektor, die Verallgemeinerung bietet aber keine Schwierigkeiten. Ebenso müssen wir noch die Analoga der Vertauschungsformeln (8. 6) für η_{ij} benützen. Die Formel (10. 4) bekommt man unmittelbar, wenn $\varDelta\eta_{ij}$ auf Grund von (9. 3) in der Form:

$$\varDelta\eta_{ij} = \xi^r\partial_r\eta_{ij} + v^r\partial_r\xi^m\partial_{\dot{v}^m}\eta_{ij} + \eta_{rj}\partial_i\xi^r + \eta_{ir}\partial_j\xi^r$$

benützt wird. Wir bemerken noch, daß die Formeln (10. 3) und (10. 4) auf beliebige Tensoren erweitert werden können.

Jetzt können wir schon die Integrabilitätsbedingungen von (10. 1) bestimmen. Eine kovariante Ableitung der Gleichung (10. 1) nach x^l zeigt auf Grund der allgemeinen Relation (10. 3), daß die Gleichung

$$(\varDelta g_{ik})|_l = 0$$

---

[6]) Wir haben (10. 1) mit 2 dividiert.

in der Formel

(10.5) $$\Delta L^{*j}_{i\ k} = 0$$

enthalten ist. Eine Reihe der Integrabilitätsbedingungen von (10.1) erhält man also durch die Bestimmung der Integrabilitätsbedingungen von (10.5). Nach der Gleichung (9.5) bekommt man statt (10.5):

(10.6) $$\xi^j|_i|_k + \bar{R}_i{}^j{}_{kr}\xi^r + L^{*j}_{i\ k}\|_r(\xi^r|_o + 2\Omega^{*r}_{o\ t}\xi^t) + 2\Omega^{*j}_{i\ r}\xi^r|_k + 2\Omega^{*j}_{i\ r}|_k\xi^r = 0.$$

Differenziert man jetzt diese Gleichung kovariant nach x^l, vertauscht man dann die Indizes k und l, so erhält man einen Ausdrück für $2\xi^j|_i|_{[k}|_{l]}$. Diese Differenz kann aber auf Grund der Identitäten von Ricci und im Hinblick auf (10.6) durch ξ^j und $\xi^j|_i$ ausgedrückt werden; somit bekommt man unter Beachtung der Bianchischen Identitäten (8.7) des Hauptkrümmungstensors $\bar{R}_i{}^j{}_{kl}$ eine Gleichung für $\xi^t, \xi^t|_r$ und $\xi^t|_o$. Beachtet man noch die Formel

(10.7) $$\bar{R}_i{}^j{}_{kl}\|_t = 2L^{*j}_{i\ [k}\||_{|t|}|_{l]} + 2L^{*j}_{i\ r}\|_t\Omega^{*r}_{k\ l} + 2l^s L^{*r}_{s\ [k}\||_{|t|}L^{*j}_{|i|\ l]}\|_r,$$

so sieht man, daß die erhaltene Gleichung eben

(10.8) $$\Delta\bar{R}_i{}^j{}_{kl} = 0$$

ist. Weitere kovariante Ableitungen ergeben auf Grund von (10.5) im Hinblick auf die Verallgemeinerung von (10.3):

(10.9) $$\Delta(\bar{R}_i{}^j{}_{kl}|_{m_1}|_{m_2}\ldots|_{m_p}) = 0.$$

Differenziert man jetzt (10.1) partiell nach v^j, so wird auf Grund der Formel (10.4):

(10.10) $$\Delta\partial_{v^j} g_{ik} = 0$$

und nach weiteren partiellen Ableitungen nach v^r bekommt man:

(10.11) $$\Delta\partial_{v^1\ldots v^r} g_{ik} = 0, \quad \partial_{v^1\ldots v^r} = \frac{\partial^r}{\partial v^1\cdots\partial v^r}, \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

Es kann leicht verifiziert werden, daß

(10.12) $$\partial_{v^m}\Delta L^{*j}_{i\ k} - \Delta\partial_{v^m}L^{*j}_{i\ k} = 0.$$

besteht; dabei ist $\partial_{v^m}L^{*j}_{i\ k}$ auf Grund des Transformationsgesetzes (3.2) von $L^{*j}_{i\ k}$ ein Tensor. Aus (10.12) folgt nach (10.5):

(10.13) $$\Delta\partial_{v^1\ldots v^s}L^{*j}_{i\ k} = 0, \qquad (s = 0, 1, \ldots)$$ [7].

Wegen der Homogenität, kommt bei diesen Gleichungen nur die letzte in Betracht, da daraus schon die Gültigkeit der Übrigen folgt. (Vgl. etwa [14] S. 79, oder [6], Gleichung (3.11).)[8]

---

[7]) $s = 0$ gibt eben (10.5).

[8]) In [6] ist zwar das Grundelement eine kovariante Vektordichte vom Gewicht —1, der formale Apparat ist aber dem unsrigen bezüglich der Gleichung (10.13) ganz ähnlich.

Die kovarianten Ableitungen von (10. 13) ergeben noch die Reihe

$$(\Delta \partial_{v^1 \dots v^s} \overset{*}{L}{}_i{}^j{}_k)|_{m_1} \dots |_{m_t} = 0. \tag{10. 14}$$

Die Integrabilitätsbedingungen können wir also im folgenden Theorem zusammenfassen:

Theorem B. *Die Integrabilitätsbedingungen von* (10. 1) *sind die Gleichungen* (10. 5), (10. 8)—(10. 11), (10. 13) *und* (10. 14).

Alle übrigen Integrabilitätsbedingungen sind schon in diesen enthalten. Wir müssen also noch zeigen, daß die Bedingungen

$$(\Delta \partial_{v^k} g_{ij})|_m = 0, \tag{10. 15}$$

und

$$\partial_{v^m} \Delta \overline{R}_i{}^j{}_{kl} = 0 \tag{10. 16}$$

schon in den bisherigen Integrabilitätsbedingungen enthalten sind.

Nun kann die Formel

$$(\partial_{v^k} g_{ij})|_m - \partial_{v^k} g_{ij}|_m = -\partial_{v^k} \overset{*}{L}{}_t{}^r{}_m (v^t \partial_{v^r} g_{ij} - g_{ir} \delta_j^t - g_{rj} \delta_i^t) \tag{10. 17}$$

unmittelbar verifiziert werden. Beachtet man jetzt daß *für eine Bewegung die Liesche Ableitung nach* (10. 3), (10. 4) *und* (10. 13) *mit der kovarianten Ableitung nach* x^l *und mit der partiellen Ableitung nach* v^l *vertauschbar ist,* so erhält man nach der Lieschen Ableitung von (10. 17) wegen $g_{ij}|_m = 0$ und $\Delta v^t = 0$ eben die Relation (10. 15).

Betreffs des Beweises der Relation (10. 16), beachte man, daß wegen (2. 29) die Gleichung (10. 7) in der Form:

$$\partial_{v^t} \overline{R}_i{}^j{}_{kl} = 2(\partial_{v^t} \overset{*}{L}{}_i{}^j{}_{[k})|_{l]} + 2 \overset{*}{\Omega}{}_k{}^r{}_l \partial_{v^t} \overset{*}{L}{}_i{}^j{}_r + v^s \partial_{v^t} \overset{*}{L}{}_s{}^r{}_{[k} \partial_{v^{|r|}} \overset{*}{L}{}_{|i|}{}^j{}_{l]}$$

geschrieben werden kann. Nach Anwendung der Lieschen Ableitung auf beiden Seiten dieser Gleichung, bekommen wir im Hinblick auf (10. 12) und (10. 13) eben die Gleichung (10. 16), w. z. b. w.

§ 11. Sätze über die Bahnkurven der Bewegungen.

Wir werden in diesem Paragraphen die Analoga zu einigen Sätzen bezüglich der Bewegungen die M. S. Knebelman für den Finslerraum bestimmt hat, in unserem Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ untersuchen. (Vgl. [12] § 10.) Die durch (10. 2) bestimmten Killingschen Gleichungen werden wir in der Form

$$\xi^m \partial_m g_{ik} + v^r \partial_{v^m} g_{ik} \partial_r \xi^m + g_{rk} \partial_i \xi^r + g_{ir} \partial_k \xi^r = 0 \tag{11. 1}$$

benützen.

In einem geeigneten Koordinatensystem kann erreicht werden, daß $\xi^i = \delta_1^i$ besteht. Aus (11. 1) wird dann

$$\partial_1 g_{ik} = 0. \tag{11.2}$$

Aus dieser Gleichung folgt ebenso wie bei KNEBELMAN (vgl. [12] S. 557) die Feststellung, daß es in einem $\mathfrak{L}_n$, in dem eine Bewegungsgruppe existiert, ein Koordinatensystem gibt, für daß (11. 2) erfüllt ist. Aus (11. 2) folgt nämlich, daß die endlichen Transformationen

$$\bar{x}^i = x^i + \delta_1^i t \tag{11.3}$$

die Bogenlänge nicht verändern, und aus (11. 3) folgt noch, daß diese Transformationen eine Gruppe bilden. Auch im $\mathfrak{L}_n$ besteht also der Satz:

Gestattet $\mathfrak{L}_n$ eine infinitesimale Bewegung, so gestattet $\mathfrak{L}_n$ auch eine einparametrige Bewegungsgruppe, die von der infinitesimalen Bewegung erzeugt wird.

Ebenso wie im Finslerraum kann man auch im Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ beweisen, daß *zwei linear-unabhängige Bewegungen verschiedene Bahnen haben.* (Vgl. [12] S. 558.)

Es scheint zweckmäßig zu sein, die Translationen in den allgemeinen metrischen Linienelementräumen $\mathfrak{L}_n$ etwas anders zu definieren, als im Finslerraum (vgl. [12] S. 558), oder im Riemannschen Raum (vgl. [7] § 52). Für die Translationen geben wir die folgende

Definition. *Eine Bewegung ist eine Translation, falls ihre Bahnkurven gleichzeitig autoparallele Linien von $\mathfrak{L}_n$ sind.*

Im Finslerraum, bzw. im Riemannschen Raum stehen statt autoparalleler Linien die geodätischen Kurven; diese sind aber in diesen beiden Räumen mit den autoparallelen Linien identisch. Somit stimmt unsere Definition mit der gewöhnlichen überein, falls $\mathfrak{L}_n$ einen Finslerschen, bzw. Riemannschen Raum bedeutet. Im allgemeinen Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ sind aber die autoparallelen Linien und die Extremalen, d. h. die geodätischen Kurven, wie wir in § 5. gezeigt haben, verschieden.

Im Finslerraum haben die Translationen die charakteristische Eigenschaft, daß ihre Bahnkurven eine geodätische Linie unter gleichem Winkel schneiden. Im Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ ist das nur unter gewissen Bedingungen wahr. Es besteht das

Theorem C. *Bestehen in einem Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ längs einer autoparallelen Linie C die Relationen:*

$$A_{oor} = 0, \quad \sigma_{ioo} = 0 \tag{11.4}$$

und bedeutet T eine Translation, die in einem geeigneten Koordinatensystem durch (11. 3) *dargestellt ist, so schneiden die Bahnkurven von T die autoparallele Linie C unter demselben Winkel.*

B e m e r k u n g. Da (11.3) die Bahnkurven der Translation bestimmt, kann man mit einem geeigneten Koordinatensystem erreichen, daß im Finslerraum

$$\partial_1 g_{1h} - \frac{1}{2}\partial_h g_{11} = 0$$

bestehe. (Vgl. [12] S. 558—559, insb. Gl. (10.12.)) In unserem Raum $\mathfrak{L}_n$ kann diese Relation mit der in [12] angegebenen Methode nur dann erreicht werden, wenn die Bedingungen (11.4) im ganzen Raum bestehen.

B e w e i s d e s T h e o r e m s C. Nach unserer Annahme ist die Bewegung (11.3) eine Translation. Der Vektor der Bewegung ist somit $\xi^i = \delta^i_1$, und es besteht auch die Gleichung (11.2). Bedeutet $x^i = x^i(s)$ die autoparallele Kurve C, so ist nach der Gleichung (5.5a)

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = -L^{*i}_{o\,o}, \quad l^i = \frac{dx^i}{ds}, \tag{11.5}$$

und der Winkel θ der Bahnen mit der autoparallelen Kurve C ist

$$\cos\theta = g_{1i}\frac{dx^i}{ds}.$$

Differenziert man diese Gleichung nach s, so wird wegen (11.5) längs C

$$\frac{d}{ds}\cos\theta = (\partial_k g_{1j} - g_{1i}L^{*i}_{j\,k} - 2A_{1oi}L^{*i}_{j\,k})\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}. \tag{11.6}$$

Aus (2.12) folgt:

$$\partial_k g_{1j} - 2A_{1ji}L^{*i}_{o\,k} - 2L^*_{(1j)k} = 0.$$

Überschiebt man diese Gleichung mit $l^j l^k$ und drückt man dann aus dieser Gleichung L^*_{1oo} aus, so kann sofort festgelegt werden, daß (11.6) in der Form

$$\frac{d}{ds}\cos\theta = L^*_{1oo}$$

angegeben werden kann. Nach den Formeln (2.24) und (2.18) folgt aber im Hinblick auf die Gleichungen (11.2) und (11.4) wegen $\sigma_{o1o} = -\sigma_{1oo} = 0$, daß längs C $L^*_{1oo} = 0$ ist. Somit wird

$$\frac{d}{ds}\cos\theta = 0$$

w. z. b. w.

Ist $x^i = x^i(s)$ die Gleichung einer Kurve, so nennt man den Vektor $u^i = \xi^i|_j x'^j$ den assoziierten Vektor von ξ^i bezüglich der Kurve $x^i(s)$ (vgl. etwa [12] S. 560). Für den assoziierten Vektor besteht das

Theorem D. *Bestehen in einem* $\mathfrak{L}_n$ *längs einer Kurve* C *die Relationen* (11.4) *und ist* ξ^i *der Vektor einer Bewegung, so ist der assoziierte Vektor* μ^i *orthogonal zur Kurve* C, *wenn* $l^i = x'^i$ *ist.*

Beweis. Überschieben wir die Gleichung (10.2) mit $l^i l^k$, so wird nach

$$\xi_i|_k x'^k = \mu_i$$

und nach (11.4) längs C die Gleichung

$$\mu_i x'^i - 2\Omega^*_{too}\xi^t = 0 \tag{11.7}$$

bestehen. Nach (2.24) ist aber auf Grund der Symmetrie von Γ^*_{tkm} in t, m

$$\Omega^*_{tkm} = \sigma_{[t|k|m]} - A_{[t|kr|}\,\sigma_{|\varrho|m]}^{\;\;s} J^r_s.$$

Nach den Bedingungen (11.4) ist dann wegen der schiefen Symmetrie des Tensors σ_{tkm} in t, k längs der Kurve C

$$\Omega^*_{too} = 0.$$

Somit beweist die Gleichung (11.7) eben das Theorem D.

§ 12. Räume, in denen die Bewegungsgruppe $\frac{1}{2}n(n+1)$ Parameter hat.

Die Bewegungsgruppe des $\mathfrak{L}_n$ wird von denjenigen Geschwindigkeitsvektoren ξ^i der Transformation (9.1) erzeugt, die den Killingschen Gleichungen (10.2) genügen. Da die Zahl der Gleichungen (10.2) $1/2n(n+1)$ ist, kann die allgemeine Lösung von (10.2) höchtens $1/2n(n+1)$ Parameter haben.

H. C. Wang hat bewiesen (vgl. [17] S. 5.):

Wenn in einem n-dimensionalen $(n>2)$ *Finslerraum* E_n *eine Bewegungsgruppe existiert, die* $r > 1/2n(n-1)+1$ *Parameter hat, dann ist* E_n *notwendigerweise ein Riemannscher Raum von konstanter Krümmung.*

Im allgemeinen metrischen Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ ist dieser Satz nicht zutreffend. Die Methode von H. C. Wang, mit der er diesen Satz bewiesen hat, ist auch im Raum $\mathfrak{L}_n$ anwendbar, und führt zur Gleichung

$$\frac{1}{2}\,\partial^3_{v^i v^j v^k} F^2 = 0.$$

Nach (1.4) ist aber diese Gleichung mit

$$3(\partial_{v^{(k}} g_{ij)} + v^r \partial^2_{v^{(j} v^{k}} g_{i)r}) + \frac{1}{2} v^r v^s \partial^3_{v^i v^j v^k} g_{rs} = 0 \tag{12.1}$$

identisch. Aus dieser Gleichung kann aber in $\mathfrak{L}_n$ noch nicht gefolgert werden, daß g_{ij} von den v^k unabhängig ist. Doch bedeutet die Relation (12.1) eine Beschränkung für g_{ij} die wir im folgenden Theorem zusammenfassen.

T h e o r e m E. *Existiert in einem metrischen Linienelementraum $\mathfrak{L}_n (n>2)$ eine Bewegungsgruppe, die $r > 1/2n(n-1)+1$ Parameter hat, so erfüllt sein metrischer Grundtensor g_{ij} die Relation* (12. 1).

Wir betrachten im folgenden einen Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$, in dem *eine Bewegungsgruppe mit* $1/2n(n+1)$ *wesentlichen Parameter existiert,* und wollen in einigen Spezialfällen die Gestalt des Krümmungstensors untersuchen. Dazu schreiben wir die Killingschen Gleichungen (10. 2) in der Form:

(12. 2)
$$\zeta_{ik}+\zeta_{ki}=0,$$
wo

(12. 3)
$$\zeta_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} \xi_i|_k + A_{ikm}(\xi^m|_o - 2\Omega^{*m}_{t\ \ o}\xi^t) - 2\Omega^*_{t(ik)}\xi^t$$
bedeutet. Nun betrachten wir die folgenden Spezialfälle

A$_1$) $\zeta_{ik} = \zeta_{i|k}, \quad \overline{R}_{o\ km}^{\ j} = 0, \quad \Omega^{*j}_{i\ k} = 0;$

A$_2$) $\zeta_{ik} = \zeta_i|_k, \quad \Omega^{*j}_{i\ k} = 0, \quad \zeta_i\|_r = 0, \quad \overline{R}_{i\ kr}^{\ r} = \overline{R}^r_{\ irk};$

A$_3$) $\Omega^*_{t(ik)} = 0, \quad A_{ikm} = 0.$

Wir beweisen jetzt das folgende Theorem:

T h e o r e m F. *Im Falle* A$_1$) *ist die Krümmung des metrischen Linienelementraumes* $\mathfrak{L}_n$ *identisch Null; im Falle* A$_2$) *ist der Linienelementraum* $\mathfrak{L}_n$ *von skalarer Krümmung; im Falle* A$_3$) *hat der Hauptkrümmungstensor die Form:*

$$\overline{R}_{ktij} = \frac{\overline{R}}{n(n-1)}(g_{ki}g_{tj} - g_{kj}g_{ti}) + Q^*_{ktij}, \quad \overline{R} = g^{ki}\overline{R}_{k\ it}^{\ t}$$

wo Q^*_{ktij} *von* $\Omega^{*i}_{k\ t}$ *und deren kovarianten Ableitungen abhängt.*

B e w e i s. Im Falle A$_1$) bekommt man aus (12. 2):

(12. 4)
$$\zeta_{(i|j)} = 0, \qquad \zeta_t = g_{ir}\xi^r.$$
Wir wollen jetzt die in der Riemannschen Geometrie angewandte Methode benützen (vgl. [7] § 53). Differenzieren wir (12. 4) kovariant nach x^k, so wird:

(12. 5)
$$\zeta_{(i|j)|k} = 0.$$
Auf Grund dieser Gleichung besteht offenbar:

(12. 6)
$$\zeta_i|_j|_k + \zeta_i|_{[k}|_{j]} + \zeta_j|_{[i}|_{k]} + \zeta_k|_{[i}|_{j]} = 0.$$
Nach der Gleichung (8. 5) folgt bei der Beachtung der Bedingungen des Falles A$_1$) und im Hinblick auf (8. 3) und (7. 10)

(12. 7)
$$\zeta_i|_j|_k = -\zeta_r \overline{R}_{k\ ji}^{\ r} = -\zeta_r R_{k\ ji}^{\ r}$$
da nach den gestellten Bedingungen

(12. 8)
$$R_{i\ km}^{\ j} = \overline{R}_{i\ km}^{\ j}$$

besteht. Aus der Gleichung (12.7) folgen die Gleichungen (12.5) und (8.5). Bilden wir jetzt die Integrabilitätsbedingungen von (12.7) und benützen wir die Identitäten von Ricci für

$$2\zeta_{i|j|[k|l]},$$

so bekommen wir ebenso, wie im Riemannschen Raum (vgl. [7] § 53):

$$\zeta_r(\bar{R}_l{}^r{}_{ij|k} - \bar{R}_k{}^r{}_{ij|l}) + \zeta_{t|r}(\delta_k^r \bar{R}_l{}^t{}_{ij} - \delta_i^t \bar{R}_j{}^r{}_{kl} + \delta_l^r \bar{R}_k{}^t{}_{ji} - \delta_j^r \bar{R}_i{}^t{}_{kl}) = 0.$$

Existiert also im Raum $\mathfrak{L}_n$ eine Bewegungsgruppe mit $1/2n(n+1)$ Parametern, so folgt aus unserer letzten Gleichung, wegen der schiefen Symmetrie von $\zeta_{i|j}$ (vgl. (12.4)):

$$\bar{R}_l{}^r{}_{ij|k} - \bar{R}_k{}^r{}_{ij|l} = 0$$

und

$$\delta_k^{[r} \bar{R}_l{}^{t]}{}_{ij} + \delta_i^{[r} \bar{R}_j{}^{t]}{}_{kl} + \delta_l^{[r} \bar{R}_k{}^{t]}{}_{ji} + \delta_j^{[t} \bar{R}_i{}^{r]}{}_{kl} = 0. \tag{12.9}$$

Wir können jetzt ganz analog wie in der Riemannschen Geometrie verfahren, (vgl. [7] § 53), da nach (12.8) der Tensor $\bar{R}_{ijkl}$ auch in i, j schiefsymmetrisch ist. Setzt man in (12.9) $r = l$, so wird nach einer Summation auf l im Hinblick auf (8.3) und (7.10)

$$\bar{R}_{ktij} = \frac{1}{n-1}(g_{tj}\bar{R}_{ik} - g_{ti}\bar{R}_{jk}), \qquad \bar{R}_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{R}_i{}^l{}_{kl}. \tag{12.10}$$

Eine Überschiebung mit g^{tj} ergibt, daß $\bar{R}_{ki}$ ein symmetrischer Tensor ist. Eine Überschiebung von (12.10) mit g^{ik} ergibt dann, daß

$$\bar{R}_{jt} = \frac{1}{n}\bar{R}g_{jt}, \qquad \bar{R} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{R}_i^i \tag{12.11}$$

besteht. Überschiebt man jetzt (12.10) mit l^k, so wird man nach (12.11) $\bar{R} = 0$ erhalten, das beweist aber auf Grund von (12.10) und (12.11) unsere Behauptung im Falle A_1).

Einen Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$, dessen Hauptkrümmungstensor identisch Null ist, bekommt man, wenn g_{ik} allein von den v^i abhängig ist, und nach unserer Bedingung $\sigma_{ikm} = 0$ besteht. Das ist aus den Formeln (2.24), (2.18), (2.21) und (7.7) ersichtlich. Die Räume $\mathfrak{L}_n$, in denen der metrische Fundamentaltensor von den v^i unabhängig ist, sind die Verallgemeinerungen der Minkowskischen Räume. Es ist nach (2.18) und (2.21) jetzt offenbar $\Gamma^*_{ijk} = 0$. (Vgl. auch die Formel (6.2)). Wäre jetzt noch auch $A_{ikm} = 0$, so wäre $g_{ik} = \text{konst}$; der Raum $\mathfrak{L}_n$ wäre somit bezüglich der Metrik ein Euklidischer Raum. Das invariante Differential ist aber auch in einem Descartes-schen Koordinatensystem von der Form:

$$D\eta^i = d\eta^i + \mu_r{}^i{}_k \eta^r \omega^k(d);$$

somit ist dieser Raum eine Erweiterung des Euklidischen Raumes. Die Erweiterung zeigt sich in dem Vorhandensein des Raumtorsionstensors $\mu_r{}^i{}_k$.

Im Falle A_2) bekommt man ebenso, wie vorher die Gleichungen (12. 4)—(12. 7). Die Integrabilitätsbedingungen von (12. 7) ergeben aber jetzt auf Grund der Identitäten von Ricci die Gleichungen:

$$\zeta_r(\overline{R}_t{}^r{}_{ij}|_k - \overline{R}_k{}^r{}_{ij}|_t + L_i^{*r}{}_j\|_t \overline{R}_o{}^t{}_{kl}) + \zeta_t|_r(\delta_k^r \overline{R}_l{}^t{}_{ij} - \delta_i^t \overline{R}_j{}^r{}_{kl} + \delta_l^r \overline{R}_k{}^t{}_{ji} - \delta_j^r \overline{R}_i{}^t{}_{kl}) = 0.$$

Hat nun die Bewegungsgruppe $1/2n(n+1)$ wesentliche Parameter, so existiert auch eine Lösung ζ_r dieser Gleichung mit $1/2n(n+1)$ Parameter, d. h. nach (12. 4) bekommt man die Gleichung (12. 9) und

$$\overline{R}_l{}^r{}_{ij}|_k - \overline{R}_k{}^r{}_{ij}|_l + L_i^{*r}{}_j\|_t \overline{R}_o{}^t{}_{kl} = 0.$$

Nun wollen wir uns mit der Gleichung (12. 9) beschäftigen; diese Gleichung bestimmt schon die Form des Krümmungstensors. Nach einer Verjüngung auf r, l wird aus der Gleichung (12. 9) im Hinblick auf (7. 10) und (8. 3)

$$(12.\ 12) \qquad (n-1)\overline{R}_k{}^t{}_{ji} - \delta_k^t \overline{R}_r{}^r{}_{ij} = \delta_i^t \overline{R}_{jk} - \delta_j^t \overline{R}_{ik}, \qquad \overline{R}_{ik} \overset{\text{def}}{=} \overline{R}_i{}^r{}_{kr}.$$

Nach einer Verjüngung auf j, t wird:

$$(12.\ 13) \qquad \overline{R}_r{}^r{}_{ik} = 2(n-1)\overline{R}_{[ik]}.$$

Nach einer Verjüngung auf k, t bekommt man aus (12. 12):

$$(12.\ 14) \qquad (2n-1)\overline{R}_r{}^r{}_{ij} = 2\overline{R}_{[ij]}.$$

Aus den Gleichungen (12. 13) und (12. 14) folgt nun

$$(12.\ 15) \qquad \overline{R}_{[ij]} = 0, \qquad \overline{R}_r{}^r{}_{ij} = 0.$$

Die Gleichung (12. 12) geht somit in

$$(12.\ 16) \qquad \overline{R}_{ktji} = \frac{1}{n-1}(g_{it}\overline{R}_{jk} - g_{jt}\overline{R}_{ik})$$

über, wo nach (12. 15) der Tensor $\overline{R}_{jk}$ symmetrisch ist. Eine Überschiebung mit g^{ik} ergibt aus (12. 16) wieder die Relation $\overline{R}_{jt} = 1/n R g_{jt}$; somit wird aus (12. 16)

$$(12.\ 17) \qquad \overline{R}_{ktji} = \frac{\overline{R}}{n(n-1)}(g_{kj}g_{ti} - g_{tj}g_{ki}).$$

Hieraus ergibt sich aber, daß der Linienelementraum $\mathfrak{L}_n$ bezüglich des Hauptkrümmungstensors $\overline{R}_i{}^j{}_{kl}$ ein Raum von skalarer Krümmung ist. Die Räume, deren Krümmungstensoren die Form (12. 17) haben, sind immer Räume von skalarer Krümmung im Sinne von L. Berwald; er hat nämlich die Finslerräume skalarer Krümmung durch

$$(12.\ 17\text{a}) \qquad R_o{}^j{}_{ok} = R(\delta_k^j - l^j l_k)$$

gekennzeichnet. Aus der Formel (12. 17) folgt aber offenbar nach einer Überschiebung mit $l^k l^j$ für $\overline{R}_o{}^t{}_{oi}$ die Form (12. 17a). (Vgl. [2] Gleichung (13. 3).)

Ist $\overline{R} = \text{konst.}$, so ist $\mathfrak{L}_n$ ein Raum von konstanter Krümmung. Damit haben wir den zweiten Teil des Theorems F bewiesen.

Da nach (12. 17) $\overline{R}_{ktji}$ in den ersten beiden Indizes schiefsymmetrisch ist, so folgt aus (7. 6) wegen der schiefen Symmetrie des vollständigen Riemannschen Krümmungstensors in den ersten beiden Indizes, daß auch

$$M^*_{ijr}(\delta^r_p + M^{*r}_{o\ p})\overline{R}_o{}^p{}_{ts}$$

in i, j schiefsymmetrisch ist. Aus der schiefen Symmetrie folgt nun wegen der speziellen Form (12. 17) des Hauptkrümmungstensors $\overline{R}_{ktji}$, daß

$$M^*_{(ij)r}(\delta^r_p + M^{*r}_{o\ p})\delta^p_{[s} l_{t]} = 0$$

besteht. Nach einer Überschiebung mit $l^t(\delta^s_k - M^{*s}_{o\ k})$ erhält man nach den Gleichungen (2. 6a), (2. 1a) und (2. 3b), daß schon $M^*_{(ij)k} = 0$ ist. Auf Grund von (2. 13) wird daher

$$A_{ijr}(\delta^r_k - M^{*r}_{o\ k}) = 0, \quad M^*_{ijk} = \mu_{ijk}(x, v)$$

bestehen. Eine Überschiebung mit $(\delta^k_t + M^{*k}_{o\ t})$ ergibt sofort nach (2. 3a), daß $A_{ijt} = 0$ besteht; der Raum $\mathfrak{L}_n$ ist also eine unmittelbare Erweiterung des Riemannschen Raumes. Der metrische Grundtensor $g_{ik}(x)$ bestimmt nämlich einen Riemannschen Raum von konstanter Krümmung, das invariante Differential hängt aber vom Linienelement ab. Es ist[9])

$$D\eta^i = d\eta^i + (\mu_r{}^i{}_t\omega^t(d) + \Gamma^{*i}_{r\ t}dx^t)\eta^r.$$

Nach (12. 3) ist $\zeta_{ik} = \xi_i|_k$. Im Raum existiert also der Raumtorsionstenso $\mu_r{}^i{}_t(x, v)$.

Wir wollen uns jetzt mit dem Fall A_3) befassen. Nach unseren Annahmen

$$A_{ijk} = 0, \quad \Omega^*_{i(jk)} = 0$$

folgt auf Grund der Formel (2. 24), daß

$$\Omega^*_{ijk} = \sigma_{[i|j|k]}, \quad \Omega^*_{i(jk)} = \frac{1}{2}\sigma_{i(jk)} = 0$$

besteht. Da σ_{ijk} in i, j immer schiefsymmetrisch ist, so beweist unsere letzte Gleichung die schiefe Symmetrie des Tensors σ_{ijk} in allen Indizes. σ_{ijk} ist selbstverständlich von (x, v) abhängig. Der Raum $\mathfrak{L}_n$ ist also wieder eine Erweiterung des Riemannschen Raumes, da die Tensoren μ_{ijk} und σ_{ijk} nicht verschwinden. Es tritt also in diesem Falle entgegen den vorigen Fällen neben dem Raumtorsionstensor μ_{ijk} auch eine Übertagungstorsionstensoı σ_{ijk} auf.

Aus der Gleichung (10. 2) wird:

$$\xi_{(i|k)} = 0$$

[9]) Wir bemerken, daß im Falle $A_{ijk} = 0$ und $\Omega^*_{ijk} = 0$ aus (2. 24) leicht gefolgert werden kann, daß $L^{*j}_{i\ k} = \Gamma^{*j}_{i\ k}$ ist.

und nach kovarianter Ableitung nach x^l wird:

$$\xi_{(i|k)|l} = 0.$$

Auf Grund dieser Gleichung kann die Relation

$$\xi_i|_j|_k + \xi_i|_{[k}|_{j]} + \xi_j|_{[i}|_{k]} + \xi_k|_{[i}|_{j]} = 0$$

unmittelbar verifiziert werden. Nach den Identitäten von Ricci, d. h. nach den Gleichungen (8. 5) wird wegen $\xi^i\|_k = 0$:

$$\xi_i|_j|_k + \frac{1}{2}\xi_r(\overline{R}_i{}^r{}_{jk} + \overline{R}_j{}^r{}_{ki} + \overline{R}_k{}^r{}_{ji}) + \xi_t|_r(\delta^t_i \Omega^{*r}_j{}_k + \delta^t_j \Omega^{*r}_k{}_i + \delta^t_k \Omega^{*r}_j{}_i) = 0.$$

Beachten wir jetzt die Bianchischen Identitäten (8. 3)-nachdem wir in (8. 3) statt $R_m{}^i{}_{jk}$ auf Grund von (7. 10) $\overline{R}_m{}^i{}_{jk}$ eingeführt haben-, so wird man aus unserer letzten Gleichung

$$\xi_i|_j|_k - \xi_r(R_k{}^r{}_{ij} - \Phi_k{}^r{}_{ij}) + \xi_t|_r \Phi_i{}^{tr}{}_{jk} = 0 \tag{12. 18}$$

bekommen, wo

$$\Phi_k{}^r{}_{ij} \overset{\text{def}}{=} \Omega^{*r}_i{}_j|_k + 2\Omega^{*r}_i{}_t \Omega^{*t}_j{}_k + \{\text{zykl.}\}_{ijk}$$

$$\Phi_i{}^{tr}{}_{jk} \overset{\text{def}}{=} \delta^t_i \Omega^{*r}_j{}_k + \delta^t_j \Omega^{*r}_k{}_i + \delta^t_k \Omega^{*r}_j{}_i$$

bedeutet. Differenziert man die Gleichung (12. 18) kovariant nach x^l, und vertauscht dann die Indizes k, l, so wird man nach Elimination von $\xi_t|_r|_l$ eine Gleichung der Form

$$\xi_i|_j|_{[k}|_{l]} - \xi_s(R_{[k}{}^s{}_{|ij|}|_{l]} + \psi_k{}^s{}_{jil}) - \xi_t|_r(\delta^r_{[l} \overline{R}_{k]}{}^t{}_{ij} + \psi_i{}^{tr}{}_{ijkl}) = 0$$

erhalten. Benützt man jetzt die Identitäten von Ricci, wobei $\xi_i|_j|_r$ wieder vermöge (12. 18) eliminiert wird, so erhält man bei Beachtung der schiefen Symmetrie von $\xi_t|_r$ eine Gleichung, in der der Koeffizient von $\xi_t|_r$ die Form:

$$\delta^{[r}_{[k} \overline{R}_{l]}{}^{t]}{}_{ij} + \delta^{[r}_{[i} \overline{R}_{j]}{}^{t]}{}_{kl} + Q_{ij}{}^{tr}{}_{kl}$$

hat, wo der Tensor $Q_{ij}{}^{tr}{}_{kl}$ allein von den $\Omega^{*i}_j{}_k$ bzw. deren kovarianten Ableitungen abhängt.

Hat im Raume $\mathfrak{L}_n$ die Bewegungsgruppe $1/2n(n+1)$ wesentliche Parameter, so muß dieser Koeffizient verschwinden. Setzt man $r = l$, so wird nach den Gleichungen (8. 3) und (7. 10)

$$(n-1)\overline{R}_k{}^t{}_{ij} + \delta^t_k \overline{R}_r{}^r{}_{ij} = \delta^t_j \overline{R}_{ik} - \delta^t_i \overline{R}_{jk} + Q_k{}^t{}_{ij}. \tag{12. 19}$$

Nach (2. 13) ist aber wegen $A_{ijr} = 0$ der Tensor M^*_{ijr} in i, j schiefsymmetrisch; da aber der vollständige Riemannsche Krümmungstensor in den ersten beiden Indizes immer schiefsymmetrisch ist, gilt dies wegen (7. 6) auch für den Hauptkrümmungstensor. Somit bekommt man aus der Relation (12. 19)

$$\overline{R}_k{}^t{}_{ij} = \frac{1}{n-1}(\delta^t_j \overline{R}_{ik} - \delta^t_i \overline{R}_{jk}) + \frac{1}{n-1} Q_k{}^t{}_{ij}. \tag{12. 20}$$

Ziehen wir den Index „t" herunter, dann bekommt man nach Überschiebung mit g^{tj}

$$\overline{R}_{ki}=\overline{R}_{ik}+\frac{1}{n-1}\,Q_{k\;\;it}^{\;\;t}. \tag{12.21}$$

Eine Überschiebung von (12.20) mit g^{ik} ergibt wegen der schiefsymmetrischen Eigenschaften des Hauptkrümmungstensors

$$\overline{R}_{tj}=\frac{1}{n-1}(g_{tj}\overline{R}-\overline{R}_{jt})+\frac{1}{n-1}\,Q^{r}{}_{trj}. \tag{12.22}$$

Aus (12.21) und (12.22) folgt, daß $\overline{R}_{ik}$ die Form

$$\overline{R}_{ik}=\frac{1}{n}\,\overline{R}g_{ik}+\overline{Q}_{ik}$$

hat, wo $\overline{Q}_{ik}$ allein von den $\Omega^{*j}_{i\;\;k}$ und deren kovarianten Ableitungen abhängt. Substituiert man $\overline{R}_{ik}$ in die Gleichung (12.20), so bekommt man für den Hauptkrümmungstensor die im Theorem F angegebene Form.

Schriftenverzeichnis.

[1] L. Berwald, Über die n-dimensionalen Cartanschen Räume und eine Normalform der zweiten Variation eines $(n-1)$-dimensionalen Oberflächenintegrals, *Acta Math.*, **71** (1939), 191—248.

[2] L. Berwald, Über Finslersche und Cartansche Geometrie. IV, *Annals of Math.*, **48** (1947), 755—781.

[3] E. Cartan, Les espaces de Finsler, *Actualités scientifiques et industrielles*, **79** (Paris Hermann & Cie., 1934).

[4] E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Cahiers scientifiques, fasc. II Deuxième édition (Paris, Gauthier-Villars, 1946).

[5] E. T. Davies, On metric spaces based on a vector density, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **49** (1947), 241—259.

[6] E. T. Davies, On motions in a metric space based on the notion of area, *Quarterly Journal of Math.* (Oxford series), **16** (1945), 22—30.

[7] L. P. Eisenhart, *Continuous groups of transformations* (Princeton University Press, 1933).

[8] P. Finsler, *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen* (Dissertation Göttingen, 1918).

[9] J. G. Freemann, First and second variations of the length integral in a generalized metric space, *Quarterly Journal of Math.* (Oxford series), **15** (1944), 70—83.

[10] J. I. Horváth und A. Moór, Entwicklung einer Feldtheorie begründet auf einen allgemeinen metrischen Linienelementraum, *Indagationes Math.*, **17** (1955), 421—429, 581—587.

[11] A. Kawaguchi, Beziehung zwischen einer metrischen linearen Übertragung und einer nicht-metrischen in einem allgemeinen metrischen Raume, *Proc. Kon. Acad. Wet. Amsterdam*, **40** (1937), 596—601.

[12] M. S. Knebelman, Collineations and motions in generalized spaces, *American Journal of Math.*, **51** (1929), 527—564.

[13] J. A. Schouten und J. Haantjes, Über die Festlegung von allgemeinen Maßbestimmungen in bezug auf ko- und kontravariante Vektordichten, *Monatshefte für Math. und Phys.* **43** (1936), 161—176.

[14] Gy. Soós, Über Gruppen von Affinitäten und Bewegungen in Finslerschen Räumen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), 73—84.

[15] O. Varga, Über affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeiten von Linienelementen, insbesondere deren Äquivalenz, *Publicationes Math.* (Debrecen), **1** (1949), 7—17.

[16] O. Varga, Zur Herleitung des invarianten Differentials in Finslerschen Räumen, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **50** (1941), 165—175.

[17] H. C. Wang, On Finsler spaces with completely integrable equations of Killing, *Journal of the London Math. Soc.*, **22** (1947), 5—9.

(Eingegangen am 28. Dezember 1955.)